

Zadania na ćwiczenia z szeregów czasowych,
lista 1

1. Niech $\{Z_n, -\infty < n < \infty\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych iid, a g_m borelowska funkcja rzeczywista na R^m , gdzie $1 \leq m \leq \infty$. Pokazać, że procesy $\{X_n, -\infty < n < \infty\}$ zdefiniowane poniżej są stacjonarne w węższym sensie.
 - (a) $X_n = g_m(Z_n, Z_{n+1}, \dots, Z_{n+m-1})$,
 - (b) $X_n = g_m(Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_{n-m+1})$,
2. Rozważyć zadanie 1 w przypadku, gdy $\{Z_n\}$ jest procesem stacjonarnym w węższym sensie.
3. Niech $\{X_n\}$ oraz $\{Y_n\}$ będą wzajemnie niezależnymi procesami stacjonarnymi w węższym sensie. Pokazać, że proces $\{X_n + Y_n\}$ jest stacjonarnym w węższym sensie.
4. Niech X, Y, Z będą zmiennymi losowymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej o skończonym drugim momencie, natomiast a, b, c dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Pokazać, że

$$\text{cov}(aX + bY + c, Z) = a \text{cov}(X, Z) + b \text{cov}(Y, Z).$$

5. Niech $\{X_n\}$ oraz $\{Y_n\}$ będą nieskorelowanymi procesami, tzn. X_r oraz Y_s są nieskorelowane dla każdego r i s . Pokazać, że jeżeli procesy te są stacjonarne w szerszym sensie, to proces $\{X_n + Y_n\}$ jest stacjonarnym w szerszym sensie o funkcji kowariancji równej sumie funkcji kowariancji obu procesów.
6. Niech $Z_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ będą wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym ze średnią zero i wariancją σ^2 oraz niech a, b, c , będą stałymi.
 - (i) Dla procesów zdefiniowanych poniżej znaleźć funkcję wartości oczekiwanej oraz funkcję autokowariancji i autokorelacji.
 - (ii) Który z tych procesów jest procesem stacjonarnym w szerszym sensie?
 - (a) $X_t = a + bZ_t + cZ_{t-1}$,
 - (b) $X_t = a + bZ_0$.
 - (c) $X_t = Z_1 \cos(ct) + Z_2 \sin(ct)$,
 - (d) $X_t = Z_0 \cos(ct)$,
 - (e) $X_t = Z_t \cos(ct) + Z_{t-1} \sin(ct)$,
 - (f) $X_t = Z_t Z_{t-1}$.
7. Niech $\{Z_n\}$ będzie białym szumem gaussowskim o średniej zero i wariancji jeden. Zdefiniujmy proces $\{X_n\}$ przez

$$X_n = \begin{cases} Z_n, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzyste,} \\ (Z_{t-1}^2 - 1)/\sqrt{2}, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

- (a) Pokazać że $\{X_n\}$ jest białym szumem ale nie jest IID białym szumem.
 - (b) Znaleźć $E(X_{n+1}|X_1, X_2, \dots, X_n)$.
8. Która z następujących funkcji zdefiniowanych na zbiorze liczb całkowitych jest funkcją autokowariancji procesu stacjonarnego (stacjonarnego szeregu czasowego).
 - (a) $f(h) = 1$ dla każdego h .
 - (b) $f(h) = 1$ dla $h = 0$ oraz $\frac{1}{h}$ dla $h \neq 0$.
 - (c) $f(h) = (-1)^{|h|}$,
 - (d) $f(h) = 1 + \cos \frac{\pi h}{2} + \cos \frac{\pi h}{4}$,
 - (e) $f(h) = 1 + \cos \frac{\pi h}{2} - \cos \frac{\pi h}{4}$,
 - (f) $f(h)$ jest równa 1 jeżeli $h = 0, 0.4$ jeżeli $h = \pm 1$, oraz 0 poza tym.
 - (g) $f(h)$ jest równa 1 jeżeli $h = 0, 0.6$ jeżeli $h = \pm 1$, oraz 0 poza tym.

9 Pokazać, że funkcja autokowariancji dla procesu średniej ruchomej $MA(q)$, tj procesu

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}, \quad t \in \mathbf{Z},$$

gdzie $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, $\theta_i \in R$, jest równa

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^q \theta_j^2, & \text{jeżeli } h = 0; \\ \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|h|} \theta_j \theta_{j+h}, & \text{jeżeli } 1 \leq h \leq q; \\ 0, & \text{jeżeli } h = 0. \end{cases}$$

10 Pokazać, że jeżeli $\{\kappa(h), h \in Z\}$ jest funkcją symetryczną i nieujemnie określoną, to istnieje proces stacjonarny w szerokim sensie, którego funkcja kowariancji jest równa $\{\kappa(h)\}$.

Wskazówka: Pokazać że istnieje proces gaussowski o tej funkcji autokowariancji.