Rozwiązanie zadania 1

Niech dopasowany model regresji ma postać

$$\widehat{\log Y} = \hat{\beta}_1^* + \hat{\beta}_2^* \log X^*$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\log X_i^* - \overline{\log X^*} &= \log \mu X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log X_j^* \\
&= \log \mu X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log \mu X_j \\
&= \log \mu + \log X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (\log \mu + \log X_j) \\
&= \log \mu + \log X_i - \log \mu - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log X_j \\
&= \log X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log X_j \\
&= \log X_i - \overline{\log X}
\end{aligned}$$

Tak więc $\hat{\beta}_2^* = \hat{\beta}_2$. W celu obliczenia błędu standardowego $\hat{\beta}_2^*$ potrzebujemy $\hat{\beta}_1^*$.

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1^* = \overline{\log Y} - \hat{\beta}_2^* \, \overline{\log X^*} &= \overline{\log Y} - \hat{\beta}_2 \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (\log \mu + \log X_j) \\
&= \overline{\log Y} - \hat{\beta}_2 \log \mu - \hat{\beta}_2 \overline{\log X} \\
&= \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \log \mu
\end{aligned}$$

Stąd reszta $\widehat{u}_i^*$ jest postaci

$$\widehat{u}_i^* = \log Y_i - \widehat{\beta}_1^* - \widehat{\beta}_2^* \log X_i^* =$$

$$= \log Y_i - (\widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_2 \log \mu) - \widehat{\beta}_2 (\log X_i + \log \mu)$$

$$= \widehat{u}_i$$

Tak więc estymator wariancji błędu jest niezmieniony a więc i błąd standardowy $\widehat{\beta}_2^*$ jest taki sam jak dla $\widehat{\beta}_2$.

W konsekwencji

$$(R^2)^* = 1 - \frac{\sum (\widehat{u}_i^*)^2}{\sum (\log Y_i - \overline{\log Y})} =$$

$$= 1 - \frac{\sum (\widehat{u}_i)^2}{\sum (\log Y_i - \log \overline{Y})} = R^2$$

Rozwiązanie zadania 2.

W zadaniu rozpatrujemy dwa modele

$$\log Y = \beta_1 + \beta_2 \log X + u \qquad (1)$$

$$\log \frac{Y}{X} = \alpha_1 + \alpha_2 \log X + u \qquad (2)$$

gdzie u jest błędem (czynnikiem zakłócającym).

Zauważmy, że (2) można zapisać jako

$$\log Y = \alpha_1 + (\alpha_2 + 1)\log X + u$$

co odpowiada modelowi (1), w którym

$$\beta_1 = \alpha_1 \quad i \quad \beta_2 = \alpha_2 + 1$$

Gdy oznaczymy $y = \log Y$, $x = \log X$ i $z = \log \frac{Y}{X}$ dopasowanie na podstawie tej samej n-elementowej próby obu modeli ma postać

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x \qquad (3)$$

$$\hat{z} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 x \qquad (4)$$

Korzystając z postaci estymatorów parametrów modeli otrzymujemy

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \frac{\sum (x_i - \bar{x})([y_i - x_i] - [\bar{y} - \bar{x}])}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} - \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \hat{\beta}_2 - 1$$

Podobnie korzystając z postaci estymatorów parametrów modelu regresji liniowej otrzymujemy

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{z} - \hat{\alpha}_2 \bar{x} = (\bar{y} - \bar{x}) - \hat{\alpha}_2 \bar{x}$$

$$= \bar{y} - (\hat{\alpha}_2 + 1)\bar{x} = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x} = \hat{\beta}_1$$

Stąd otrzymujemy równości

$$\hat{z}_i = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 x_i = \hat{\beta}_1 + (\hat{\beta}_2 - 1) x_i = \hat{\beta}_1 + \beta_2 x_i - x_i$$

$$= \hat{y}_i - x_i$$

Aby pokazać, że reszty w modelu (3) są takie same jak w modelu (4) zauważmy, że jeśli oznaczymy przez $\hat{u}_i$ reszty dla (3) a przez $\hat{v}_i$ reszty dla (4) to

$$\hat{v}_i = z_i - \hat{z}_i = y_i - x_i - (\hat{y}_i - x_i) = y_i - \hat{y}_i = \hat{u}_i$$

Błędy standardowe są takie same dla $\hat{\beta}_2$ i $\hat{\alpha}_2$

$$\sqrt{\frac{\sum \hat{u}_i^2/(n-2)}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{\sum \hat{v}_i^2/(n-2)}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

UWAGA.

Wartości $\hat{R}^2$ będą różne gdyż wartość R^2 odzwierciedla proporcję wariancji zmiennej zależnej objaśnianej przez regresję a zmienne zależne w obu modelach są różne.

Rozwiązanie zadania 3.

Zaproponowany model

$$UMIEJETNOSCI = \beta_1 + \beta_2 \log(DOSWIADCZENIE) + \beta_3 \log(DOSWIADCZENIE^2) + u$$

nie można dopasować metodami regresji liniowej gdyż

$$\log(DOSWIADCZENIE^2) = 2\log(DOSWIADCZENIE)$$

i mamy do czynienia ze współliniowością.