

Rozwiązania zadań z listy do
wykładu nr 5 (Interpretacja geometryczna) ①

Rozwiązanie zadania 3.

Rozpatrywane w zadaniu modele
regresji liniowej mają postać

$$y = X\beta + u$$

$$y = X\beta + Z\delta + u$$

i zakładamy, że $X^T Z = 0$

Estymatory dla tych modeli
mają odpowiednio postać

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\tilde{\beta} = (X^T M_Z X)^{-1} X^T M_Z y$$

Zakładamy, że $X^T Z = 0$ więc

$$P_Z X = 0 \quad (*)$$

$$M_Z X = X - P_Z X = X \quad (**)$$

Wstawiając za $M_Z X$, w równanie
opisującym $\tilde{\beta}$, X otrzymamy

$$\tilde{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T M_Z y$$

Korzystając z $(**)$ oraz $(*)$ mamy

$$X^T M_Z y = X^T y$$

$$\text{Stąd } \tilde{\beta} = \hat{\beta}$$

Rozwiązanie zadania 4.

Korzystając z postaci:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\tilde{\beta} = (X^T M_Z X)^{-1} X^T M_Z y$$

Odejmujemy

$$\tilde{\beta} - \hat{\beta} = (X^T M_Z X)^{-1} X^T M_Z y - (X^T X)^{-1} X^T y$$

Mnożąc obie strony tej równości przez

$X^T M_Z X$ otrzymamy

$$\begin{aligned} X^T M_Z X (\tilde{\beta} - \hat{\beta}) &= X^T M_Z y - X^T M_Z X (X^T X)^{-1} X^T y \\ &= X^T M_Z y - X^T M_Z P_X y \\ &= X^T M_Z M_X y \end{aligned}$$

Pomnając teraz przez
 $(X^T M_Z X)^{-1}$ otrzymamy

$$\tilde{\beta} - \hat{\beta} = (X^T M_Z X)^{-1} X^T M_Z M_X y$$

Co mielibyśmy pokazać.

Rozwiązanie zadania 5.

Skorzystamy z faktu, że wyznacznik macierzy dodatnio określonej jest nieujemny. Wyznacznik macierzy

$$\text{Var}(b) = \begin{bmatrix} \text{Var}(b_1) & \text{Cov}(b_1, b_2) \\ \text{Cov}(b_1, b_2) & \text{Var}(b_2) \end{bmatrix}$$

jest równy

$$\text{Var}(b_1) \text{Var}(b_2) - [\text{Cov}(b_1, b_2)]^2$$

Ponieważ macierz $\text{Var}(b)$ jest dodatnio określona więc

$$\text{Var}(b_1) \text{Var}(b_2) - [\text{Cov}(b_1, b_2)]^2 \geq 0$$

co jest równoważne nierówności

$$[\text{Cov}(b_1, b_2)]^2 \leq \text{Var}(b_1) \text{Var}(b_2)$$

UWAGA. Możemy pokazać tę nierówność uprzedem z definicji macierzy dodatnio określonej

Niech $S_1^{-2} = \text{Var}(b_1)$ i $S_2^{-2} = \text{Var}(b_2)$

Wtedy

$$\begin{bmatrix} S_1 & -S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Var}(b_1) & \text{Cov}(b_1, b_2) \\ \text{Cov}(b_1, b_2) & \text{Var}(b_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ -S_2 \end{bmatrix} =$$

$$S_1^2 \text{Var}(b_1) + S_2^2 \text{Var}(b_2) - 2S_1S_2 \text{Cov}(b_1, b_2) =$$

$$2 - \frac{2 \text{Cov}(b_1, b_2)}{(\text{Var}(b_1) \text{Var}(b_2))^{1/2}}$$

Ponieważ $V(b)$ jest dodatnio określona
wzsc

$$2 - \frac{2 \text{Cov}(b_1, b_2)}{(\text{Var}(b_1) \text{Var}(b_2))^{1/2}} \geq 0$$

i w konsekwencji

$$\text{Cov}(b_1, b_2) \leq [\text{Var}(b_1) \text{Var}(b_2)]^{1/2}$$

Ponownie to rozumowanie dla
 S_1 i S_2 odwróconych

$$\text{Cov}(b_1, b_2) \geq -[\text{Var}(b_1) \text{Var}(b_2)]^{1/2}$$

co wzsc

$$\rho(b_1, b_2) = \frac{\text{Cov}(b_1, b_2)}{(\text{Var}(b_1) \text{Var}(b_2))^{1/2}}$$

specjalna miarowość

$$-1 \leq \rho(b_1, b_2) \leq 1.$$