

Zadania na ćwiczenia do wykładu z procesów Markowa
lista nr 1

- 1 Niech $\{X_n\}$ będzie łańcuchem Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejścia P równą

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Wyznacz prawdopodobieństwa $P(X_1 = 1|X_0 = 1)$ oraz $P(X_7 = 2|X_4 = 0)$.

- 2 Podaj prosty przykład jednorodnego łańcucha Markowa $\{X_n, n \geq 0\}$ z przestrzenią stanów $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, taki że

$$P(X_2 = 6|X_1 \in \{3, 4\}, X_0 = 2) \neq P(X_2 = 6|X_1 \in \{3, 4\}).$$

- 3 Niech $\{Z_n\}$ będzie ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (iid), $P(Z_1 = 1) = p$, $P(Z_1 = -1) = 1 - p$, $0 < p < 1$, natomiast $\{X_n, n \geq 0\}$ procesem zdefiniowanym przez

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

gdzie X_0 jest zmienną losową przyjmującą wartości całkowite i niezależną z ciągiem $\{Z_n\}$.

Pokazać, że $\{X_n, n \geq 0\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa i znaleźć jego macierz prawdopodobieństwa przejścia.

Zdefiniowany proces $\{X_n\}$ nazywa się błądzeniem losowym.

Rozważyć sytuację, w której zmienne losowe Z_n przyjmują wartości całkowite z prawdopodobieństwami $P(Z_n = k) = a_k$, $-\infty < k < \infty$. Napisać macierz prawdopodobieństwa przejścia.

- 4 Niech $\{Z_n\}$ będzie ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, $P(Z_1 = k) = a_k$, $k \geq 0$, natomiast $\{X_n, n \geq 0\}$ ciągiem zdefiniowanym przez

$$X_{n+1} = (X_n - 1)_+ + Z_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

gdzie X_0 jest zmienną losową o wartościach całkowitych nieujemnych, niezależną z ciągiem $\{Z_n\}$, a $(x)_+ = \max(0, x)$.

Pokazać, że $\{X_n, n \geq 0\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa o macierzy prawdopodobieństwa przejścia

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Interpretacja: Łańcuch Markowa $\{X_n\}$ nazywany jest czasem modelem konserwatora. W modelu tym zmienna losowa Z_n jest interpretowana jako liczba zepsutych maszyn (elementów) w n -tym dniu, a konserwator może zreperować w ciągu jednego dnia tylko jedną maszynę (element).

- 5 (Model zapasów). Pewien towar jest magazynowany aby zaspakajać ciągłe zapotrzebowanie na niego. Niech $\{Z_n, n \geq 1\}$ będzie ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych, o tym samym rozkładzie i niezależnych z początkową zawartością magazynu X_0 . Uzupełnianie magazynu odbywa się w chwilach $n+0$, tzn. bezpośrednio po czasie $n \geq 1$. Popularna strategia uzupełniania zapasów $(s - S)$, gdzie s i S są liczbami całkowitymi, $0 < s < S$, mówi: Jeżeli poziom zapasów w chwili n jest mniejszy niż s to powinien być on uzupełniony do poziomu S w chwili $n + 0$. W przeciwnym wypadku nie uzupełnia się zapasów. Przyjmuje się, że $X_0 \leq S$. Wtedy poziom zapasów w chwili n jest równy X_n i proces ten spełnia równanie rekurencyjne

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - Z_{n+1} & \text{jeżeli } s < X_n \leq S, \\ S - Z_{n+1} & \text{jeżeli } X_n \leq s. \end{cases}$$

Pokazać, że $\{X_n\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa oraz znaleźć jego macierz prawdopodobieństw przejścia.