

Zadania na ćwiczenia z szeregów czasowych, 2005
lista 7

1. Niech $\{X_n\}$ będzie procesem stacjonarnym o średniej $EX_n = \mu$ i funkcji autokorelacji $\{\rho(k)\}$. Znaleźć prognozę X_{n+k} w języku zmiennej losowej X_n .
2. Niech $X_t = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, gdzie A i B są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi o średniej 0 i wariancji 1, natomiast $\omega \in [0, \pi]$. Znaleźć prognozę $P(X_{n+1}|X_n, \dots, X_1)$ oraz jej błąd średniowadrowy w przypadkach:
(a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 3$ i dla dowolnego n .
3. Niech X_1, X_2, X_4, X_5 będą obserwacjami z procesu typu $MA(1)$, tj.

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1},$$

gdzie $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$.

- (a). Znaleźć najlepszą liniową estymatę brakującej wartości X_3 w terminach X_1 i X_2 .
- (b). Znaleźć najlepszą liniową estymatę brakującej wartości X_3 w terminach X_4 i X_5 .
- (c). Znaleźć najlepszą liniową estymatę brakującej wartości X_3 w terminach X_1, X_2, X_4 i X_5 .
We wszystkich przypadkach znaleźć błąd średniokwadratowy.
4. Rozwiązać ostatnie zadanie 3 w przypadku, gdy proces $\{X_t\}$ jest procesem $AR(1)$.
5. Znaleźć funkcję autokorelacji dla procesu $AR(2)$.
6. Znaleźć funkcję autokorelacji cząstkowej dla procesów (a) $AR(1)$, (b) $AR(2)$, (c) $MA(1)$.
7. Niech $\{X_t\}$ będzie procesem $MA(1)$ postaci $X_t = Z_t - 0.8Z_{t-1}$, gdzie $\{Z_t\} \sim WN(0, 1)$.
(a) Stosując Algorytm Innowacyjny znaleźć wektory $\theta_n = [\theta_{n,1}, \dots, \theta_{n,n}]$ oraz średniokwadratowe błędy prognoz v_n dla $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$.
(b) Stosując Algorytm Durbina-Levinsona znaleźć wektory $\phi_n = [\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,n}]$ oraz średniokwadratowe błędy prognoz v_n dla $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$.
8. Niech $\{X_t\}$ będzie procesem $MA(2)$. Pokazać, że $\theta_{n,k} = 0$ dla $k > 2$.
Rozważyć zagadnienie ogólne i pokazać że jeżeli $\{X_t\} \sim MA(q)$, to $\theta_{n,k} = 0$ dla $k > q$.