

Całki nieoznaczone**Zadanie 63.** Oblicz następujące całki nieoznaczone:

$$\int \frac{du}{2u^5}, \quad \int 8t^{1/3} dt, \quad \int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx, \quad \int \left(\sqrt{x^5} - \frac{4}{x^3}\right) dx, \quad \int \frac{e^x - 3x}{4} dx, \quad \int (3z^{-2} - z^{-1}) dz.$$

Zadanie 64. Znajdź funkcję $y = y(x)$ spełniającą poniższe równanie i warunek początkowy:

- a) $y' = 2x - 3$, $y(0) = 5$; b) $y' = 20/\sqrt{x}$, $y(1) = 40$;
c) $y' = 2x^{-2} + 3x^{-1} - 1$, $y(1) = 0$; d) $y' = 100/t^2$, $y(1) = 400$.

Zadanie 65. Znajdź funkcje spełniające poniższe równania i warunki początkowe

- a) $\frac{dy}{dx} = \frac{5x+2}{\sqrt{x}}$, $y(1) = 0$; b) $\frac{dR}{dx} = \frac{1-x^4}{x^3}$, $R(1) = 4$; c) $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{t^3-t}}{\sqrt{t^3}}$, $x(9) = 4$.

Zadanie 66. Stosując odpowiednie podstawienie oblicz całki:

$$\int (x^2 - 4)^2 2x dx, \quad \int e^{4x} 4 dx, \quad \int \frac{1}{10x + 7} dx, \quad \int \frac{x^2}{(4 - x^3)^2} dx, \quad \int \frac{1 + x}{4 + 2x + x^2} dx,$$

Zadanie 67. Prędkość gojenia się rany pooparzeniowej opisana jest przybliżonym wzorem

$$\frac{dA}{dt} = -4t^{-3}, \quad 1 \leq t \leq 10,$$

gdzie czas t liczony jest w dniach, a $A(1) = 5 \text{ cm}^2$. Oblicz powierzchnię rany po 10 dniach.**Zadanie 68.** Inny wzór na prędkość gojenia się rany (w cm kwadratowych na dzień) ma postać $A'(t) = -0,9e^{0,1t}$. Znajdź wzór na powierzchnię rany po czasie t dni jeżeli na początku rana miała 10 cm^2 .**Zadanie 69.** Pewna kompania naftowa, opierając się na trzyletnich doświadczeniach, oszacowała, że prędkość wydobywania ropy naftowej z nowego złoża opisana jest wzorem

$$R(t) = \frac{100}{t+1} + 5, \quad 0 \leq t \leq 20,$$

gdzie $R(t)$ prędkością wydobywania liczoną w tysiącach litrów po czasie t lat od momentu rozpoczęcia wydobywania. Znajdź wzór $Q(t)$ na ilość litrów ropy wydobywanych przez pierwsze t lat, jeżeli $Q(0) = 0$. Ile litrów ropy będzie wydobywane przez pierwsze 9 lat?**Zadanie 70.** Kultura drożdży rośnie z prędkością $W'(t) = 0,2e^{0,1t}$ grama na sekundę. Jaka będzie masa tej kultury bakterii po czasie t godzin, jeżeli na początku było 2 gramy bakterii?**Zadanie 71.** Z dziury tankowca, który wpłynął na rafę koralową wypływa ropa tworząc na oceanie plamę rosnącą z prędkością $(dR/dt) = 60/\sqrt{t+9}$, gdzie R jest promieniem plamy po czasie t minut. Oblicz promień plamy ropy naftowej $R(t)$ jeżeli $R(0) = 0$.**Zadanie 72.** Oblicz całki oznaczone:

$$\int_2^3 x\sqrt{2x^2-3} dx \quad \int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+3} dx \quad \int_{-1}^1 \frac{e^{-x}-e^x}{(e^{-x}+e^x)^2} dx \quad \int_7^8 \frac{\ln(t-5)}{t-5} dt.$$

Wartością średnią funkcji $f = f(x)$ na odcinku $[a, b]$ nazywamy $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Zadanie 73. Całkowity koszt (w dolarach USA) wyprodukowania x karoserii pewnego samochodu wynosi

$$C(x) = 60000 + 300x.$$

a) Oblicz średni koszt jednej karoserii, jeżeli wyprodukowano 500 karoserii (Średni koszt jednej karoserii to $\bar{C}(x) = C(x)/x$).

b) Oblicz wartość średnią funkcji kosztów na odcinku $[0, 500]$.

Zadanie 74. Prędkość gojenia się rany (w cm kwadratowych na dzień) opisana jest przybliżonym wzorem $A'(t) = -0,9e^{-0,1t}$. Na początku rana ma 9 cm^2 . Jak bardzo zmieni się powierzchnia rany w ciągu pierwszych 5-ciu dni? Jak bardzo zmieni się powierzchnia w ciągu następnych 5-ciu dni? (Wsk. Oblicz średnią powierzchnię rany na tych odcinkach).

Zadanie 75. Stężenie lekarstwa w krwioobiegu pacjenta po czasie t opisana jest wzorem

$$C(t) = \frac{0,14t}{t^2 + 1}.$$

Oblicz średnie stężenie lekarstwa w krwioobiegu w ciągu pierwszej godziny od zastrzyku. Oblicz średnie stężenie lekarstwa w krwioobiegu w ciągu pierwszych dwóch godzin od zastrzyku.

Pole obszaru na płaszczyźnie

Zadanie 76. Znajdź pole obszaru pomiędzy wykresem funkcji $f(x) = x^2 - 2x$, a osią X na odcinku $[-1, 1]$.

Zadanie 77. Znajdź pole obszaru pomiędzy wykresami funkcji

a) $y = 5 - x^2$ i $y = 2 - 2x$, b) $y = -x$ i $y = 0$, $-2 \leq x \leq 1$,

c) $y = 8 + 4x - x^2$ i $y = x^2 - 2x$, d) $y = x^3$ i $y = 4x$,

Zadanie 78. Kultura bakterii drożdży rośnie z prędkością $W'(t) = 0,3e^{0,1t}$ gramów na godzinę. Oblicz pole pomiędzy wykresem W' a osią T na odcinku $[0, 10]$. Jak można zinterpretować otrzymaną liczbę?

Całkowanie przez części

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Zadanie 79. Oblicz całki

$$\int xe^{3x} dx, \quad \int x^3 \ln x dx, \quad \int x^2 e^x dx, \quad \int x(\ln x)^2 dx, \quad \int x\sqrt{x+4} dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x-2}} dx.$$

Zadanie 80. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

a) $y = x - \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$;

b) $y = 1 - \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$;

c) $y = (x - 2)e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$;

d) $y = (3 - x)e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$.

Całka niewłaściwa

Zadanie 81. Oblicz całki niewłaściwe:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^4}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^{2/3}}, \quad \int_0^\infty e^{-x} dx, \quad \int_1^\infty \frac{\ln x}{x} dx.$$

Zadanie 82. Po przyjęciu lekarstwa organizm zazwyczaj nie przyswaja go w całości. Jedyną metodą na stwierdzenie ilości przyswojonego lekarstwa jest zmierzenie prędkości z jaką lekarstwo jest usuwane z organizmu. Załóżmy, że wydalania lekarstwa z organizmu (mililitrach na minutę) zadana jest wzorem $R(t) = te^{-0,2t}$ gdzie t jest czasem, który upłynie od momentu przyjęcia lekarstwa. Jak dużo lekarstwa jest usunięte z organizmu?