

Równania różniczkowe

Równanie różniczkowe na funkcję $y = y(x)$ postaci

$$y' = \frac{g(x)}{f(y)}$$

nazywa się *równaniem o zmiennych rozdzielonych*. Oznaczmy przez F i G funkcje pierwotne: $F' = f$ i $G' = g$ (Uwaga: funkcje F i G są wyznaczone z dokładnością do stałej). Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy:

$$f(y)y' = g(x) \quad \text{czyli} \quad F(y)' = g(x) \quad \text{czyli} \quad F(y)' = G'(x).$$

Całkując równanie po prawej stronie dostajemy *równanie algebraiczne* na funkcję $y(x)$: $F(y) = G(x)$. Istnieje praktyczny ("inżynierski") sposób zapisywania powyższego rozumowania. Równanie $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)}$ przekształcamy do postaci $f(y) dy = g(x) dx$, a następnie dopisujemy całki:

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx \quad \text{czyli} \quad F(y) = G(x).$$

Zadanie 82. Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań o zmiennych rozdzielonych

a) $y' = e^{x+y}$, b) $y' = \sqrt{x}/y$, c) $y' = \sqrt{y/x}$.

Zadanie 83. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień początkowych:

a) $y' = 2$, $y(0) = 2$, b) $y' = y/x$, $y(1) = 5$, c) $y' = 1/y^2$, $y(1) = 3$.

Zadanie 84. Pewna osoba uczy się pisać na maszynie. Niech N oznacza maksymalną liczbę słów jakie potrafi napisać ona napisać w ciągu minuty. Załóżmy, że prędkość zmian N jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy N oraz górną granicą 140. Rozsądnym jest założyć, że na początku osoba ta nie potrafiła napisać żadnego słowa (tzn. $N(0) = 0$). Okazało się, że osoba ta potała napisać 35 słów na minutę po 10 godzinach uczenia się.

a) Ile słów na minutę będzie pisać ta osoba po 20 godzinach uczenia się?

b) Jak długo musi ona ćwiczyć, aby napisać 105 słów na minutę?

Zadanie 85. Plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszyły tę plotkę oraz liczby osób, które jeszcze nie słyszały tej plotki. Napisz równanie różniczkowe opisujące to prawo.

Zadanie 86. (*Inny model rozprzestrzeniania się plotki*). Załóżmy teraz, że plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób według prawa Gompertza: $\frac{dy}{dt} = kye^{-(73/520)t}$, gdzie $y(t)$ jest liczą osób, które słyszały plotkę po t dniach. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób.

a) Ile osób pozna tę plotkę po 7 dniach?

b) Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób?

Zadanie 87. Epidemia grypy w populacji liczącej 50000 osób rozprzestrzenia się według prawa Gompertza:

$$\frac{dy}{dt} = kye^{-0,03t},$$

gdzie $y(t)$ oznacza liczbę zarażonych grypą po t dniach. Załóżmy, że na początku było 100 chorych, a po 10 dniach – 500.

- a) Ile osób będzie zarażonych po 20 dniach?
- b) Kiedy połowa populacji będzie zarażona?

Zadanie 88. Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia (prawo Newtona). Zakładamy, że $S(0) = 100^{\circ}\text{C}$ w temperaturze otoczenia 20°C . Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosiła 60°C . Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę 25°C ?

Zadanie 89. (Zadanie nieobowiązkowe) Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata. wynosiła ona $32,6^{\circ}\text{C}$. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła $31,4^{\circ}\text{C}$. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21°C . Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo – Jan G., twierdzi jednak, że jest nie winny. Ma alibi. Po południu był on w restauracji. O 17:00 miał rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut na piechotę od miejsca morderstwa. Czy alibi to jest niepodważalne?

Zadanie 90. (Zadanie nieobowiązkowe) (*Ciąg dalszy zadania poprzedniego*). Obrońca Jana G. zauważył, że zamordowany był u lekarza o 16:00 w dniu śmierci i wtedy jego temperatura wynosiła $38,3^{\circ}\text{C}$. Załóżmy, że taką temperaturę miał on w chwili śmierci. Czy można dalej podejrzewać, że Jan G. popełnił to morderstwo?