

Ekonometria 1

Lista nr 1

- (1) Niech X_1, \dots, X_n będzie próbą z $N(m, \sigma^2)$. Znaleźć estymator NW parametru (m, σ^2) .
- (2) Estymator NW może nie istnieć. Rozważyć próbę jednoelementową z $N(n, \sigma^2)$ i spróbować wyznaczyć ENW dla (m, σ^2) .
- (3) Estymator NW może nie być wyznaczony jednoznacznie. Niech X_1, \dots, X_n będzie próbą z $U([\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}])$ - rozkładu jednostajnego na przedziale $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$. Znaleźć ENW dla θ .
- (4) Wykonuje się niezależne doświadczenia, z prawdopodobieństwem sukcesu θ w każdym doświadczeniu, tak długo, aż zaobserwuje się $k \geq 1$ sukcesów (k jest ustalone). Wyznaczyć ENW dla θ .
- (5) Sprawdź, że acierz kowariancji $\Sigma = (\sigma_{ij})$ jest symetryczna, $\sigma_{ii} = \text{Var}(X_i)$. Jeżeli X_i i X_j są niezależne to $\sigma_{ij} = 0$.
- (6) Pokaż, że macierz kowariancji jest nieujemnie określona.
- (7) Niech $Y = CX$. Wtedy $\Sigma_Y = C^t \Sigma_X C$.
- (8) Jeżeli X i Y są niezależne to $\Sigma_{X+Y} = \Sigma_X + \Sigma_Y$.
- (9) $X \sim N(m, \sigma^2 I)$, C macierz ortogonalna to $CX \sim N(Cm, \sigma^2 I)$.
- (10) Udowodnij nierówność Schwarz $\text{Cov}(X_i, X_j)^2 \leq \text{Var}(X_i)\text{Var}(X_j)$.
- (11) Jeżeli wektor X ma rozkład normalny to $AX + a$ też (A macierz, a wektor).
- (12) Pokaż, że współczynnik determinacji $\frac{SSR}{SST}$ jest równy kwadratowi współczynnika korelacji próbkowej r^2 .
- (13) Pokaż, że $\text{Cov}(\bar{Y}, b_1) = 0$.
- (14) Dany jest model postaci $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$. Wiadomo, że $\sum x_i^2 = 1520$, $\sum x_i = 104$, $\sum x_i y_i = 162400$, $\sum (\hat{Y}_i - Y_i)^2 = 10000$, $\bar{Y} = 1400$, $n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = 1344$. Oszacuj parametry strukturalne oraz oblicz współczynnik determinacji.
- (15) Dane są modele $Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_i + \varepsilon_i$ oraz $X_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + \varepsilon'_i$. Estymacji parametrów dokonano klasyczną MNK. Co można powiedzieć o współczynnikach determinacji w obydwu modelach? Czy między parametrami α_k i β_k ($k = 0, 1$) istnieje związek tożsamościowy?
- (16) Oszacuj parametry modelu $Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \varepsilon_i$, jeżeli $\sum_1^{20} x_i y_i = 100$, $\sum_1^{20} y_i = 108$, $\sum_1^{20} x_i^2 = 40$, $20 \sum_1^{20} x_i^2 - (\sum_1^{20} x_i)^2 = 544$, $S = 0.5$. Oblicz współczynnik determinacji.
- (17) Hurtownia owoców przeprowadziła analizę zależności popytu na jabłka od przeciętnych dochodów mieszkańców pobliskiego miasta. W tym celu wykorzystano następujący model $Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 + \varepsilon_i$. Oszacuj parametry modelu wiedząc, że $\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = 6$, $\sum x_i = 16$, $\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = 32$, $\bar{Y} = 5$, $\sum x_i y_i = 82$, $SE_{\alpha_1}^2 = 1/4$.
- (18) Rozpatrzmy próbę dwuwymiarową

$$\begin{array}{cccccccccccc} x: & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ y: & 15 & 6 & -1 & -6 & -9 & -10 & -9 & -6 & -1 & 6 & 15 \end{array}$$

Narysować wykres rozproszenia danych i obliczyć próbkowy współczynnik korelacji. Czy na podstawie wykresu można stwierdzić, że między zmiennymi x i y istnieje zależność? Pomiąć dwie ostatnie obserwacje i obliczyć jeszcze raz współczynnik korelacji. Czy zmienne x i y są ujemnie zależne?

- (19) Rozpatrujemy model regresji z pominięciem wyrazu stałego, $Y_i = \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, gdzie ε_i s'ą niezależne o rozkładzie $N(0, \sigma^2)$. Pokazać, że estymator MNK współczynnika kierunkowego β_1 ma postać $b_1 = \sum Y_i x_i / \sum x_i^2$. Ponieważ estymuje się tylko jeden współczynnik równania regresji, więc liczba stopni swobody związana z

$$SSE = \sum_1 (Y_i - b_1 x_i)^2$$

wynosi $n - 1$ i nieobciążonym estymatorem σ^2 jest $S^2 = (n - 1)^{-1}SSE$.

- (20) Anality bankowy interesuje się prognozowaniem podstawowej bankowej stopy procentowej (PBSP) za pomocą analizy regresji, w której zmienną niezależną jest stopa procentowa Funduszu Rezerwy Federalnej (FRF). Zebrano wyniki obserwacji obu tych wielkości z 15 losowo wybranych tygodni. Otrzymano następujące dane

<i>FRF</i>	<i>PBSP</i>
6.23	7.75
6.87	8.50
5.54	6.85
5.90	6.78
6.45	8.00
6.55	7.80
5.75	7.05
6.00	7.35
6.20	7.30
6.70	8.00
7.00	8.69
7.23	8.86
5.30	6.25
6.35	7.90
7.15	8.96

Oszacuj parametry linii regresji dla PBSP względem stopy procentowe FRF.

- (21) Podaj nieobciążoną ocenę wariancji składnika losowego w zadaniu (13).
 (22) Znajdź oceny standardowych błędów estymatorów parametrów regresji w zadaniu (13).
 (23) Wyznacz 95% przedział ufności dla obu parametrów regresji w zadaniu (13).
 (24) Ostatnio podjęto wiele wysiłków, by opracować prognozę udziału firmy w rynku na podstawie informacji o jakości jej produktu. Przypuśćmy, że dostępne są następujące dane o procentowym udziale w rynku (Y) i o jakości produktu, mierzonej pewnym obiektywnym wskaźnikiem przyjmującym wartości od 0 do 100 (X):

X :	27	39	73	66	33	43	47	55	60	68	70	75	82
Y :	2	3	10	9	4	6	5	8	7	9	10	13	12

Oszacuj parametry linii regresji udziału w rynku względem wskaźnika jakości produktu.

- (25) Dla danych z zadania (17) znajdź oceny standardowych błędów estymatorów parametrów regresji i podaj ocenę waiancji składnika losowego. Wyznacz też 95% przedział ufności dla współczynnika kierunkowego prądziwej linii regresji. Czy zero jest godną zaufania wartością tego współczynnika przy 95% poziomie ufności?
 (26) Wyznacz 95% przedział predykcji w zadaniu (13).