

Na seminarium w dniu 10.04.2024r. obliczyliśmy prezentację Wirtingera trójlistnika T :

$$(1) \quad \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T) =: \pi_1(T) = \langle x, y, z \mid z = y^{-1}xy, y = x^{-1}zx, x = z^{-1}yz \rangle.$$

Tu możemy skorzystać z pierwszej relacji ($z = y^{-1}xy$) na podstawienie z w pozostałych dwóch i otrzymujemy relacje $y = x^{-1}zx = x^{-1}y^{-1}xyx$ oraz $x = (y^{-1}xy)^{-1}y(y^{-1}xy) = y^{-1}x^{-1}y^{-1}yy^{-1}xy = y^{-1}x^{-1}yxy$; stąd

$$\pi_1(T) = \langle x, y \mid y = x^{-1}y^{-1}xyx, x = y^{-1}x^{-1}yxy \rangle.$$

Zauważmy, że obie relacje są równoważne do $xyx = yxy$, więc otrzymujemy prezentację

$$(2) \quad \pi_1(T) = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle,$$

która jest jednocześnie prezentacją „standardową” grupy warkoczy B_3 .

Natomiast możemy jeszcze rozpatrywać elementy $a = xy$ oraz $b = x^2y$ i obliczyć, że

$$a^3 = (xy)(xy)(xy) = x(yxy)xy = x(xy)xxy = (x^2y)(x^2y) = b^2,$$

co oznacza, że istnieje homomorfizm grup

$$\varphi: \langle \alpha, \beta \mid \alpha^3 = \beta^2 \rangle \rightarrow \pi_1(T) = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle,$$

który spełnia $\varphi(\alpha) = a = xy$ oraz $\varphi(\beta) = b = x^2y$. Możemy obliczyć, że $x = x^2y \cdot y^{-1}x^{-1} = ba^{-1}$ oraz $y = x^{-1} \cdot xy = (ba^{-1})^{-1} \cdot a = ab^{-1}a$, więc każde słowo z literami $x^{\pm 1}$ i $y^{\pm 1}$ można wyobrazić jako słowo z literami $a^{\pm 1}$ i $b^{\pm 1}$; to znaczy, że homomorfizm φ jest surjekcją. Ponadto relacja $xyx = yxy$ jest konsekwencją relacji $a^3 = b^2$, bo w grupie $\langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle$ mamy

$$\begin{aligned} yxy &= ab^{-1}a \cdot ba^{-1} \cdot ab^{-1}a = ab^{-1}a^2 = ab^{-1} \cdot a^3 \cdot a^{-1} = ab^{-1} \cdot b^2 \cdot a^{-1} = aba^{-1} \\ &= ba^{-1} \cdot ab^{-1}a \cdot ba^{-1} = xyx; \end{aligned}$$

to znaczy, że homomorfizm φ jest również injekcją, czyli izomorfizmem. Stąd mamy prezentację

$$(3) \quad \pi_1(T) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^3 = \beta^2 \rangle.$$

Na prezentację (2) jeszcze wrócimy pod koniec semestru, kiedy omówimy grupy warkoczy. Prezentacje (2) i (3) również wskazują, że $\pi_1(T)$ jest grupą *jednego relatora*, więc ma ciekawe własności geometryczne. W szczególności, dowolna niecykliczna grupa jednego relatora G ma działanie na (nieskończonym) drzewie $\mathcal{T}$, w odniesieniu do którego stabilizatory krawędzi są wolne, a stabilizatory wierzchołków to „prostsze” grupy jednego relatora. W terminach troszeczkę staromodnych (określonych w latach 1940-1970ych, podczas rozwoju kombinatorycznej teorii grup), możemy opisać taką grupę jako przedłużenie HNN (ang. HNN-extension, od nazwisk Grahama Higmana, Bernharda Neumanna i Hanny Neumann). Dla naszej grupy $G = \pi_1(T)$, drzewo $\mathcal{T}$ to prosta (tzn. drzewo regularne o stopniu 2), a sama grupa $\pi_1(T)$ to tzw. iloczyn półprosty $F \rtimes \mathbb{Z}$, gdzie F to grupa wolna z dwoma generatorami. Możemy dużo więcej powiedzieć o takich grupach, ale to już wykracza poza zakres naszego seminarium...