XXXVIII Konferencja
Statystyka Matematyczna Wisła 2012

TEORIA INFORMACJI A STATYSTYKA MATEMATYCZNA

Tadeusz Inglot

Instytut Matematyki i Informatyki
Politechniki Wrocławskiej

Część III
TWIERDZENIA GRANICZNE

Twierdzenie o ekwipartycji (AEP)

(asymptotic equipartition property)

$X_1, X_2, \dots$ ciąg stacjonarny i ergodyczny wektorów losowych w R^k o gęstościach skończenie wymiarowych $p(x_1, \dots, x_n)$ (lub zmiennych dyskretnych o wartościach w ustalonym zbiorze)

- $$D_n = E \log p(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n)$$ $$= H(X_1, \dots, X_n) - H(X_1, \dots, X_{n+1}) = -H(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n) < 0$$

założmy, że $\exists\, n_0 \;\; D_{n_0} > -\infty$

- D_n niemalejący (ze stacjonarności mamy
$$\begin{aligned} D_{n+1} - D_n &= H(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n) - H(X_{n+2}|X_1, \dots, X_{n+1}) \\ &= H(X_{n+2}|X_2, \dots, X_{n+1}) - H(X_{n+2}|X_1, \dots, X_{n+1}) \\ &= I(X_{n+2}, X_1|X_2, \dots, X_{n+1}) \geqslant 0) \end{aligned}$$

- $D = \lim_n D_n$ tempo wzrostu entropii (relative entropy rate)

Twierdzenie o ekwipartycji

Twierdzenie (Barron, 1985, Orey, 1985)

Przy powyższych założeniach

$$(*) \qquad \frac{1}{n}\log p(X_1, ..., X_n) \longrightarrow D \text{ p.n. (i w } L_1)$$

jest to wersja twierdzenia Shannona-McMillana-Breimana

skończony alfabet: Shannon (1948) i.i.d.,
McMillan (1953) L_1, Breiman (1957) p.n.

bardzo ogólne sformułowania np. monografia Graya (1990)

w $(*)$ mamy średnią ergodyczną

$$\frac{1}{n}\log p(X_1, ..., X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log p(X_i|X_1, .., X_{i-1})$$

Twierdzenie o ekwipartycji

Interpretacja

ciąg $x_1, \dots, x_n$ jest typowy, jeśli $p(x_1, \dots, x_n) \in (e^{nD-n\varepsilon}, e^{nD+n\varepsilon})$

- na ciągach typowych $p(x_1, \dots, x_n)$ jest asymptotycznie jednostajny
- ciąg $X_1, \dots, X_n$ jest typowy dla n dużych p.n.

kompresja danych

Wniosek (SLLN)

Jeśli X_n i.i.d. o gęstości p i $H(X_1) > -\infty$, to

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log p(X_i) \longrightarrow -H(X_1) \text{ p.n.}$$

Twierdzenie o ekwipartycji

Interpretacja

ciąg $x_1, \ldots, x_n$ jest typowy, jeśli $p(x_1, \ldots, x_n) \in (e^{nD-n\varepsilon}, e^{nD+n\varepsilon})$

- na ciągach typowych $p(x_1, \ldots, x_n)$ jest asymptotycznie jednostajny
- ciąg $X_1, \ldots, X_n$ jest typowy dla n dużych p.n.

kompresja danych

Wniosek (SLLN)

Jeśli X_n i.i.d. o gęstości p i $H(X_1) > -\infty$, to

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log p(X_i) \longrightarrow -H(X_1) \text{ p.n.}$$

Rozkład empiryczny

$\mu = (x_i, p_i)_{i=1}^{r}$ źródło (skończony alfabet)

$X = (X_1, ..., X_n)$ próba i.i.d. z rozkładu μ (blok danych)

μ_n rozkład empiryczny próby

Υ_n zbiór wszystkich miar empirycznych prób rozmiaru n
$(\nu \in \Upsilon_n \Leftrightarrow \forall i \;\; n\,\nu(\{x_i\}) \in \{0, 1, ..., n\})$

Oszacowanie dla rozkładu empirycznego

Dla dowolnego zbioru Γ_n miar na $\{x_1, ..., x_r\}$

$$P(\mu_n \in \Gamma_n) \begin{cases} \geqslant C_1(r)\; n^{-r/2} \;\; 2^{-n \min\{D(\nu||\mu):\, \nu \in \Gamma_n \cap \Upsilon_n\}} \\ \\ \leqslant C_2(r)\,(n+r)^{r-1}\, 2^{-n \min\{D(\nu||\mu):\, \nu \in \Gamma_n \cap \Upsilon_n\}} \end{cases}$$

Rozkład empiryczny

Dowód oszacowania

$\nu = (x_i, q_i)_{i=1}^r \in \Upsilon_n$ ustalona

- $P(\mu_n = \nu) = K_\nu p_1^{nq_1} \ldots p_r^{nq_r} = K_\nu 2^{\sum nq_i \log p_i}$
  $= K_\nu 2^{\sum nq_i \log q_i - \sum nq_i \log(q_i/p_i)} = K_\nu 2^{-nH(\nu) - nD(\nu||\mu)}$
- K_ν liczba realizacji próby X dających tę samą miarę empiryczną ν $\quad K_\nu = n!/((nq_1)! \ldots (nq_r)!)$
  wzór Stirlinga $\Rightarrow$ $C_1(r) n^{-r/2} 2^{nH(\nu)} \leqslant K_\nu \leqslant C_2(r) 2^{nH(\nu)}$
- stąd $C_1(r) n^{-r/2} 2^{-nD(\nu||\mu)} \leqslant P(\mu_n = \nu) \leqslant C_2(r) 2^{-nD(\nu||\mu)}$
- czyli $P(\mu_n \in \Gamma_n) \geqslant C_1(r)\, n^{-r/2}\, 2^{-n \min\{D(\nu||\mu):\, \nu \in \Gamma_n \cap \Upsilon_n\}}$
  $P(\mu_n \in \Gamma_n) \leqslant C_2(r) (\overline{\overline{\Gamma_n \cap \Upsilon_n}})\, 2^{-n \min\{D(\nu||\mu):\, \nu \in \Gamma_n \cap \Upsilon_n\}}$
- ale $\overline{\overline{\Gamma_n \cap \Upsilon_n}} \leqslant \overline{\overline{\Upsilon_n}} = \binom{n+r-1}{r-1} < (n+r)^{r-1}$

Rozkład empiryczny

$$\varepsilon > 0, \quad \Gamma_n = \Gamma = \{\nu : D(\nu||\mu) \geqslant \varepsilon\}$$

z oszacowania

$$P(D(\mu_n||\mu) \geqslant \varepsilon) \leqslant C_2(r)\,(n+r)^{r-1}\,2^{-n\varepsilon}$$

czyli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_n P(D(\mu_n||\mu) \geqslant \varepsilon) < \infty$$

Zbieżność entropijna rozkładu empirycznego

$$D(\mu_n||\mu) \longrightarrow 0 \quad \text{p.n.}$$

co więcej

$$\frac{n}{\log^2 n} D(\mu_n||\mu) \to 0 \quad \text{p.n.}$$

Rozkład empiryczny

Γ ustalony

$$\frac{1}{n}\log P(\mu_n \in \Gamma) \geqslant -\min_{\nu\in\Gamma\cap\Upsilon_n} D(\nu||\mu) + \frac{\log C_1(r) - (r/2)\log n}{n}$$

$$\frac{1}{n}\log P(\mu_n \in \Gamma) \leqslant -\min_{\nu\in\Gamma\cap\Upsilon_n} D(\nu||\mu) + \frac{\log C_2(r) + (r-1)\log n}{n}$$

udowodniliśmy

Twierdzenie Sanowa dla źródeł o skończonym alfabecie

Jeśli Γ zbiór otwarty miar na $\{x_1, \ldots, x_r\}$, to

$$\frac{1}{n}\log P(\mu_n \in \Gamma) \longrightarrow -\inf_{\nu\in\Gamma} D(\nu||\mu)$$

Rozkład empiryczny

ogólnie

Twierdzenie Sanowa (1957), LDP dla rozkładów empirycznych

$X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. o rozkładzie μ na przestrzeni polskiej, μ_n rozkład empiryczny próby $X = (X_1, \ldots, X_n)$, Γ zbiór miar wówczas

$$\liminf_n \frac{1}{n} \log P(\mu_n \in \Gamma) \geqslant - \inf_{\nu \in int\, \Gamma} D(\nu || \mu)$$

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log P(\mu_n \in \Gamma) \leqslant - \inf_{\nu \in cl\, \Gamma} D(\nu || \mu),$$

gdzie wnętrze i domknięcie Γ jest w topologii słabej zbieżności miar.

Rozkład empiryczny

Związek z twierdzeniem Craméra o wielkich odchyleniach

- $\mu_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$
  (miara empiryczna jest średnią i.i.d. miar punktowych)
- niech $\Lambda(f) = \log \int 2^f \, d\mu$, gdzie f ciągła ograniczona,
  (logarytm funkcji tworzącej momenty)
  $\Lambda^*(\nu) = \sup_f (\int f \, d\nu - \Lambda(f))$
  transformata Legendre'a -Fenchela $\Lambda(f)$
  wówczas
  $\Lambda^*(\nu) = D(\nu || \mu)$ funkcja tempa (rate function)

Twierdzenie o wielkich odchyleniach

Twierdzenie Craméra (Cramér, 1938, Chernoff, 1952)

$X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha i rozkładzie μ.

$\Lambda(x^*) = \ln \int e^{x^*} d\mu$ funkcji tworzącej momenty

$\Lambda^*(x) = \sup_{x^*}(x^*(x) - \Lambda(x^*))$
transformata Legendre'a-Fenchela $\Lambda(x^*)$

wówczas dla dowolnego zbioru borelowskiego A

$$\liminf_n \frac{1}{n} \ln P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \in A\right) \geqslant -\inf_{x \in int\, A} \Lambda^*(x)$$

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \in A\right) \leqslant -\inf_{x \in cl\, A} \Lambda^*(x)$$

$\Lambda^*(x)$ funkcja tempa (rate function)

Łańcuchy Markowa

P macierz przejścia jednorodnego łańcucha Markowa o zbiorze stanów $\{x_1, ..., x_r\}$

p rozkład początkowy łańcucha

p^* rozkład stacjonarny tzn. $p^* P = p^*$

Twierdzenie Rényi'ego (1961)

$$D(pP^n || p^*) \longrightarrow 0$$

Kendall (1963) dla przeliczalnej ilości stanów i czasu ciągłego

Łańcuchy Markowa

Dowód twierdzenia Rényi'ego

- monotoniczność $D(pP||p^*) \leqslant D(p||p^*)$
- równość iff $p = p^*$ $\qquad (*)$
- z monotoniczności $D(pP^n||p^*) \longrightarrow D_p \geqslant 0$
- skończony zbiór stanów $\Longrightarrow$ dla podciągu $P^{n'} \to P_0$
  $\Longrightarrow D_p = D(pP_0||p^*)$
- $D(pP^{n'+1}||p^*) \longrightarrow D(pP_0P||p^*) = D_p$
- z $(*)$ $pP_0 = p^* \quad \Longrightarrow D_p = 0$

Centralne twierdzenie graniczne

$X_1, X_2, \dots$ i.i.d. $EX_i = 0$, $\mathrm{Var}\, X_i = 1$,

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$$

Zbieżność informacji Fishera

Jeśli $\exists n_0 \quad J(X_1 + \dots + X_{n_0}) < \infty$, to

$$J(S_n) \to J_0, \quad J_0 \geqslant 1.$$

Centralne twierdzenie graniczne

Dowód

$J_0 = \inf J(S_n), \quad \varepsilon > 0$ dowolne

- $\exists k_\varepsilon = k \quad J(S_k) < J_0 + \varepsilon$
- niech $n = ik + m, \quad m = 0, 1, ..., k-1,$

$$S_n = \sqrt{\frac{k}{n}} \frac{X_1 + ... + X_k}{\sqrt{k}} + \sqrt{\frac{k}{n}} \frac{X_{k+1} + ... + X_{2k}}{\sqrt{k}} + ... +$$

$$+ \sqrt{\frac{k}{n}} \frac{X_{(i-1)k+1} + ... + X_{ik}}{\sqrt{k}} + \sqrt{\frac{m}{n}} \frac{X_{ik+1} + ... + X_n}{\sqrt{m}}$$

- FII $\Longrightarrow \quad J(S_n) \leqslant \frac{k}{n} J(S_k)\, i + \frac{m}{n} J(S_m) \leqslant J_0 + \varepsilon + \frac{m}{n} J(S_m)$
- $\limsup_n J(S_n) \leqslant J_0 + \varepsilon$
- z dowolności ε wynika teza

Centralne twierdzenie graniczne

Zbieżność entropijna S_n

Jeśli $\exists\, n_0 \quad D(S_n||Z) < \infty, \;\; Z \sim N(0,1)$, to

$$D(S_n||Z) \longrightarrow D_0 \geqslant 0$$

Dowód.

- z tożsamości de Bruijna

$$D(S_n||Z) = \int_0^\infty (J(S_n + \sqrt{t}Z) - \frac{1}{1+t})dt$$

$$= \int_0^\infty \left(J\left(\frac{(X_1 + \sqrt{t}Z_1) + \ldots + (X_n + \sqrt{t}Z_n)}{\sqrt{n}\sqrt{1+t}} \right) - 1 \right) \frac{dt}{1+t}$$

- twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej.

Centralne twierdzenie graniczne

Zbieżność entropijna S_n

Jeśli $\exists\, n_0 \quad D(S_n||Z) < \infty, \;\; Z \sim N(0,1)$, to

$$D(S_n||Z) \longrightarrow D_0 \geqslant 0$$

Dowód.

- z tożsamości de Bruijna

$$D(S_n||Z) = \int_0^\infty (J(S_n + \sqrt{t}Z) - \frac{1}{1+t})dt$$

$$= \int_0^\infty \left(J\left(\frac{(X_1 + \sqrt{t}Z_1) + \ldots + (X_n + \sqrt{t}Z_n)}{\sqrt{n}\sqrt{1+t}} \right) - 1 \right) \frac{dt}{1+t}$$

- twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej.

Centralne twierdzenie graniczne

Istotna trudność: pokazać, że $J_0 = 1$ i/lub $D_0 = 0$

Twierdzenie Barrona (1986)

Jeśli $\exists n_0 \quad D(S_{n_0}||Z) < \infty, \;\; Z \sim N(0,1)$, to

$$\forall t > 0 \quad J(S_n + \sqrt{t}Z) \longrightarrow \frac{1}{1+t}.$$

W konsekwencji z tożsamości de Bruijna

$$(*) \qquad D(S_n||Z) = (H(Z) - H(S_n)) \longrightarrow 0$$

$(*)$ probabilistyczny odpowiednik II zasady termodynamiki

Centralne twierdzenie graniczne

Twierdzenie Barrona i Johnsona (2004)

Jeśli $\exists n_0 \quad J(X_1 + \ldots + X_{n_0}) < \infty$, to

$$J(S_n) \longrightarrow 1 \qquad\qquad (\text{czyli } \; J(S_n||Z) \to 0).$$

Ponadto, jeśli X_1 ma skończoną zawężoną stałą Poincaré'go $R^*_{X_1} = R^* < \infty$, to

$$J(S_n||Z) \leqslant \frac{2R^*}{n-1}(J(X_1) - 1)$$

$$D(S_n||Z) \leqslant \frac{2R^*}{n-1} D(X_1||Z)$$

druga część: twierdzenie typu Berry-Esséena dla zbieżności entropijnej i zbieżności informacji Fishera

Centralne twierdzenie graniczne

X zmienna losowa

$G(X)$ przestrzeń funkcji g absolutnie ciągłych na R takich, że $0 < Eg^2(X) < \infty, \quad E(g'(X))^2 < \infty, \quad Eg(X) = Eg'(X) = 0$

$$R_X^* = \sup_{g \in H(X)} \frac{Eg^2(X)}{E(g'(X))^2} \quad \text{zawężona stała Poincaré'go}$$

- $$R_{Z_\sigma}^* = \frac{\sigma^2}{2}$$
- $$EX = 0, \ \mathrm{Var}\, X = 1 \quad \Rightarrow \quad R_X^* \geqslant \frac{EX^4 - 1}{4}$$

Centralne twierdzenie graniczne

CLT dla dowolnych rozkładów (Johnson, 2000, 2004)

$X_1, X_2, \ldots$ niezależne, $EX_i = 0$, $\operatorname{Var} X_i = \sigma_i^2$, $R^*_{X_i} = R^*_i < \infty$,

$$v_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2, \quad S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{v_n}$$

Jeśli:

warunek Lindeberga

$$\exists C > 0 \quad \frac{1}{v_n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{J(X_i)} \geqslant C$$

$$\exists D > 0 \quad \frac{1}{v_n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 R_i^* J(X_i || Z_{\sigma_i}) \leqslant D$$

to

$$J(S_n || Z) \to 0$$

Centralne twierdzenie graniczne

Dalsze wyniki Johnsona (2004):

- wielowymiarowe CLT
- CLT dla ciągów mieszających
- zbieżność do rozkładów stabilnych

O. Johnson, *Information theory and CLT*, 2004, Imperial College Press

Optymalność testów jednostajności

Optymalny test bayesowski

$\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \dots, p_k\}$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ próba i.i.d.

$H_0 : p = p_0$ przeciwko $H_1 : p \neq p_0$

$w = \{w_1, \dots, w_k\}$ rozkład 'a priori' na $\mathcal{P} \setminus \{p_0\}$

optymalny test bayesowski

$$T_n^* = \sum_{j=1}^{k} w_j \frac{p_{n,j}(X)}{p_{n,0}(X)}$$

Optymalność testów jednostajności

Alternatywy lokalne

$$p_j^{(n)} = p_0(1 + \tfrac{\rho}{\sqrt{n}} b_j), \quad \int b_j p_0 d\mu = 0, \quad \int b_j b_m p_0 d\mu = \delta_{jm}$$

$$T_n^* \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{k} w_j e^{\rho Z_j - \rho^2/2} \qquad \text{przy } P_0$$

$$T_n^* \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{j \neq m} w_j e^{\rho Z_j - \rho^2/2} + w_m e^{\rho Z_m + \rho^2/2} \qquad \text{przy } P_m^{(n)}$$

gdzie $Z_1, \ldots, Z_k$ i.i.d. $N(0,1)$

Asymptotyczny problem gaussowski

Testowanie H_0 dla alternatyw lokalnych ortogonalnych jest asymptotycznie równoważne testowaniu w R^k hipotezy $N(0, I)$ przeciwko $\{N(\frac{\rho}{\sqrt{n}} e_1, I), \ldots, N(\frac{\rho}{\sqrt{n}} e_k, I)\}$, gdzie $e_1, \ldots, e_k$ wektory jednostkowe na osiach R^k

Optymalność testów jednostajności

Dwustronny asymptotyczny problem gaussowski

W R^k testujemy hipotezę $N(0,I)$ przeciwko $2k$ alternatywom $\{N(\pm\frac{\rho}{\sqrt{n}}e_1, I), \ldots, N(\pm\frac{\rho}{\sqrt{n}}e_k, I)\}$,

w symetryczny tzn. $w_j^+ = w_j^- = \frac{1}{2}w_j$

optymalny test bayesowski

$$T_n^* = \sum_{j=1}^{k} w_j e^{-\rho^2/2} \operatorname{ch} \rho\sqrt{n}|\overline{X}_j|$$

analiza mocy T_n^* skomplikowana

Optymalność testów jednostajności

Dwustronny asymptotyczny problem gaussowski

problem cząstkowy: dwustronny test NP hipotezy $N(0, I)$

przeciwko $\{N(\frac{\rho}{\sqrt{n}}e_j, I), N(-\frac{\rho}{\sqrt{n}}e_j, I)\}$

statystyka $\sqrt{n}|\overline{X}_j|$

Optymalność testów jednostajności

Optymalny test maksimum

$$M = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \frac{\sqrt{n}|\overline{X}_j|}{c_j}$$

c_j dobrane **optymalnie** do w_j

hipotezę odrzucamy, gdy $M \geqslant 1$

(i) $\prod_{j=1}^{k}(2\Phi(c_j) - 1) = 1 - \alpha$

(ii) $\overline{\beta} = \sum_{j=1}^{k} w_j \beta_j = (1-\alpha) \sum_{j=1}^{k} w_j \frac{\Phi(c_j - \rho) - \Phi(-c_j - \rho)}{2\Phi(c_j) - 1} = \min$

(ii) $\Rightarrow w_j \dfrac{\varphi(c_j - \rho)}{\varphi(c_j)} \approx$ stałe względem $j \;\Rightarrow\; c_j = C - \dfrac{1}{\rho} \ln w_j$

C dobrane z (i)

optymalny test maksimum bliski optymalnemu testowi bayesowskiemu; łatwiejsza analiza mocy

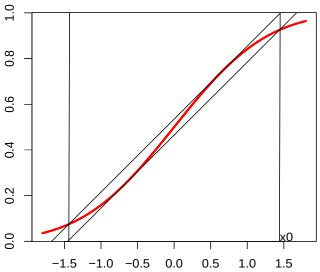
Optymalność testów jednostajności

Oszacowanie dystrybuanty $N(0,1)$

$$\frac{4}{5\sqrt{2\pi}}x + A \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{4}{5\sqrt{2\pi}}x + 1 - A, \quad |x| \leqslant x_0$$

$$A = \Phi(-\sqrt{2\ln 1.25}) + 0.8\sqrt{(\ln 1.25)/\pi}, \quad 1 - 2A \approx 0.07$$

$$\Phi(x_0) = A + (0.8x_0)/\sqrt{2\pi}, \quad x_0 \approx 1.44$$



Optymalność testów jednostajności

Oszacowanie mocy optymalnego testu maksimum

Jeśli $\alpha \leqslant 0.1$, $0 \leqslant \rho - \Phi^{-1}(1-\alpha/2) \leqslant x_0$, $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant k} w_j \geqslant 10^{-4}$

$\sum_{j: x_0 < c_j - \rho \leqslant 2} w_j \leqslant 0.2$, $\sum_{j: c_j - \rho > 2} w_j \leqslant 0.02$,

to dla optymalnego testu maksimum

$$\overline{\beta} \leqslant \frac{4\ln 2}{5\sqrt{2\pi}\rho} H(w) + \frac{4(C-\rho)}{5\sqrt{2\pi}} + 1 - A$$

$$\overline{\beta} \geqslant (1-\alpha)\left[\frac{4\ln 2}{5\sqrt{2\pi}\rho} H(w) + 0.98\frac{4(C-\rho)}{5\sqrt{2\pi}} + A - B\right]$$

B stała absolutna, $B \sim 0.062$, różnica obu stron rzędu 0.17

strata mocy (w relacji do NP) na 1 bit entropii w wynosi ok.

$$L = \frac{4\ln 2}{5\sqrt{2\pi}\rho} \sim \frac{0.221}{\rho}$$

Optymalność testów jednostajności

Testowanie jednostajności

(b_j) baza wielomianów Legendre'a

$$N_k = \sum_{j=1}^{k} \hat{b}_j^2, \quad k \geqslant 1, \quad \hat{b}_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} b_j(X_i)$$

testy adaptacyjne N_S, N_T, N_L oparte na różnych regułach wyboru wymiaru k spośród $\{1, ..., d(n)\}$

$n = 100, \quad d(n) = 12,,$

24 alternatywy "prawie" ortogonalne z rodziny wykładniczej:

$$p_j^+ = s_j^+ e^{0.25 b_j}, \quad p_j^- = s_j^- e^{-0.25 b_j}, \quad j = 1, ..., 12$$

w jednostajny, T_{24}^* optymalny test bayesowski,

$M = \max\{\hat{b}_1^2, ..., \hat{b}_{12}^2\}$ optymalny test maksimum

$\rho = 2.5, \quad H(w) = \log 24 = 4.58, \quad L\,H(w) = 0.405$

Optymalność testów jednostajności

j	NP	$T^\star$	M	N_S	N_T	N_L	N_{12}
1	80	38	36	57	53	47	28
2	81	48	46	68	66	62	42
3	80	39	37	38	38	41	30
4	80	46	44	30	34	39	39
5	82	40	38	14	26	30	30
6	82	45	44	13	31	37	39
7	80	40	38	07	26	29	30
8	83	45	43	08	30	35	38
9	81	40	37	06	24	27	30
10	83	45	43	07	27	32	37
11	79	39	37	06	21	24	30
12	82	46	42	06	24	28	37
$1-\overline{\beta}$	80.3	39.1	37.2	20.0	30.5	32.4	29.7

Optymalność testów jednostajności

						moc średnia				
w						N_S	N_L	N_{12}	T^*	$H(w)$
1/2	1/4	1/8	1/8	0	0	54.0	49.0	33.1	56.7	1.75
1/2	1/4	1/8	0.065	0.03	0.03	53.0	48.7	32.9	55.0	1.93
1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	48.3	47.3	34.8	55.2	2.00
1/4	1/4	1/5	3/20	1/10	1/20	45.4	46.2	34.3	52.1	2.42
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	36.7	42.7	34.7	51.0	2.58
0	1/3	0	1/3	0	1/3	37.0	46.0	40.0	61.5	1.58

adaptacyjne testy zgodności N_S, N_T i N_L, jako testy wielowymiarowe (a nie kierunkowe), są bliskie testom optymalnym w sensie wykorzystania informacji z próby miarą bliskości jest **moc średnia**