

Egzamin poprawkowy A2 część pierwsza - 80 minut

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.) Znajdź wzór na n -tą pochodną funkcji $f(x) = x^2 e^x$ i rozwiń ją w szereg Taylora $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ w punkcie $a = 1$.

Wskazówka. Udowodnij, że $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$. (Uwaga: za udowodnienie wskazówki otrzymasz 3pkt.)

2. (5pkt.) Zbadaj zbieżność całek. Napisz **Z** jeśli zbieżna lub **R** jeśli rozbieżna (Za każdy podpunkt otrzymasz jeden punkt, za podanie czterech bezbłędnych odpowiedzi. Ponadto za udzielenie wszystkich poprawnych odpowiedzi otrzymasz 5 punktów)

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x} dx \quad \dots\dots$

$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + x}}{x^5 + x^2} dx \quad \dots\dots$

$\int_0^{\infty} \frac{x^4 + x^3}{x^6 + \sqrt{x}} dx \quad \dots\dots$

$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x+1}}}{\sqrt{x^3 + x}} dx \quad \dots\dots$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \ln x}{x^5 + 1} dx \quad \dots\dots$

$\int_0^{\infty} \frac{\sin x + e^x}{\sin x + e^{2x}} dx \quad \dots\dots$

$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} e^x} dx \quad \dots\dots$

$\int_0^{\infty} x^{-x} \cos x dx \quad \dots\dots$

c) $\int_1^{\infty} x^{\frac{1}{\ln x}} dx \quad \dots\dots$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x} dx \quad \dots\dots$

$\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \quad \dots\dots$

$\int_1^{\infty} \frac{e^x + \sqrt{x} + \ln x}{3^x + x + \operatorname{arctg} x} dx \quad \dots\dots$

d) $\int_0^5 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx \quad \dots\dots$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx \quad \dots\dots$

$\int_0^5 \frac{1}{x^2 + 5x - 6} dx \quad \dots\dots$

$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx \quad \dots\dots$

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) Wykres funkcji $f(x) = (\sin x)^2$, dla $x \in [0, \pi]$, obrócono wokół osi OY otrzymując “miskę dla kota”. Wykonaj rysunek “miski” oraz oblicz ile mieści się w niej wody znajdując objętość odpowiedniej bryły obrotowej.

4. Zadanie bojowe (5pkt.) Naszkicuj sferę o promieniu 1 i zaznacz na niej trójkąt z jednym wierzchołkiem na biegunie polarnym, a dwoma pozostałymi na równiku, tak aby wszystkie kąty tego trójkąta były proste (np. każdy południk przecina się z równikiem pod kątem prostym). Oblicz obwód zaznaczonego w ten sposób trójkąta.

Brudnopis (nie będzie zbierany)