

Egzamin A2/Rzeszotnik/styczeń 2012/część pierwsza - 80 minut

progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 pkt.**

1.1. Odpowiedz na pytania:

a) Czy całka po odcinku domkniętym funkcji ciągłej jest zawsze ograniczona?

($[a, b]$ - odcinek domknięty, f - ciągła, czy wówczas $\int_a^b f(x)dx < \infty$?)

b) Czy całka po odcinku domkniętym funkcji nieograniczonej jest zawsze nieograniczona?

c) Czy całka po półprostej $\mathbb{R}^+$ funkcji ograniczonej jest zawsze nieograniczona?

d) Czy całka po półprostej $\mathbb{R}^+$ funkcji nieograniczonej może być ograniczona?

1.2. Czy prawdziwe są nierówności:

a) $\int_1^2 \frac{1}{\ln x} dx < 2$

b) $\int_1^2 \frac{1}{\ln x} dx < 2012$

c) $1 < \int_1^2 \frac{1}{\ln x} dx$

d) $1111 < \int_1^2 \frac{1}{\ln x} dx$

1.3. W tym zadaniu pojęcie funkcji zawężamy do funkcji rzeczywistych $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Czy każda funkcja ciągła jest różniczkowalna?

b) Czy pochodna funkcji różniczkowalnej musi być ciągła?

c) Czy pochodna funkcji różniczkowalnej zawsze spełnia własność Darboux?

d) Czy jedyną funkcją f spełniającą $f' = f$ jest $f(x) = e^x$?

1.4. Czy dla funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x}$ prawdziwe są równości:

a) $\sup\{f'(x) : x \in (0, 1)\} = 0$

b) $\inf\{f'(x) : x \in (0, 1)\} = -\infty$

c) $\sup\{f'(x) : x \in (1, \infty)\} = \infty$

d) $\inf\{f'(x) : x \in (1, \infty)\} = 0$

2. (5pkt.) Zbadaj zbieżność całek. Napisz **Z** jeśli zbieżna lub **R** jeśli rozbieżna (Za każdy podpunkt otrzymasz jeden punkt, za podanie czterech bezbłędnych odpowiedzi. Ponadto za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz 4 punkty, a za udzielenie poprawnych odpowiedzi **w 10 podpunktach** otrzymasz dodatkowo **1 pkt.**)

a) $\int_1^2 \frac{1}{\ln x} dx$

$\int_0^1 \frac{e^t}{t} dt$

$\int_2^\infty \frac{1}{\ln x} dx$

$\int_1^\infty \frac{e^t}{t} dt$

b) $\int_0^1 \frac{x^{2012} + 1}{x^{2013} + 2} dx$

$\int_1^\infty \frac{x^{2012} + 1}{x^{2013} + 2} dx$

$\int_0^\infty \frac{x^{2012} + 1}{x^{2013} + 2} dx$

$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2012} + 1}{x^{2013} + 2} dx$

c) $\int_0^\infty \frac{x^3 + \ln x}{x^5 + 1} dx$

$\int_0^1 \frac{x^3 + \ln x}{x^5 + 1} dx$

$\int_1^\infty \frac{x^3 + \ln x}{x^5 + 1} dx$

$\int_{-1}^0 \frac{x^3 + \ln|x|}{x^5 + 1} dx$

d) $\int_0^1 \ln x dx$

$\int_0^1 \frac{1}{\ln x} dx$

$\int_1^\infty \ln x dx$

$\int_1^\infty \frac{1}{\ln x} dx$

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) Rozłóż funkcję $f(x) = \frac{1}{x^n - 1}$ na ułamki proste dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Ilość punktów, które otrzymasz za rozwiązanie tego zadania wynosi $\min\{N, 5\}$, gdzie N oznacza liczbę dobrze dokonanych przez Ciebie rozkładów.

4. (5pkt.) Zadanie Pana Pizura. Oblicz całkę

$$\int \frac{x^p}{x^{77} - 1} dx,$$

dla wskazanych przez Ciebie wartości $p \in \mathbb{R}$. Ilość punktów, które otrzymasz za rozwiązanie tego zadania wynosi $\min\{P, 5\}$, gdzie P oznacza ilość wskazanych przez Ciebie wartości p .

Brudnopis (nie będzie zbierany)