

Egzamin A2/Rzeszotnik/13 luty 2013/część druga - 80 minut
progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Imię:

Nazwisko:

5. (5pkt.) Czy prawdą jest, że $x \cos(x) \leq \frac{\pi}{6}$ dla wszystkich $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$? Odpowiedź dobrze uzasadnij.

6. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + e^{-x}) \ln(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x)}{\sqrt{6x^6 + 2} \ln(1 + \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})}$$

Imię:

Nazwisko:

7. Udowodnij, że

a) (2 pkt.)

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \leq \pi$$

b) (N pkt.)

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \geq \frac{N}{\pi},$$

gdzie N jest ilością punktów, którą pragniesz uzyskać za rozwiązanie tego problemu.

8. (5pkt.) Znajdź szereg Fouriera funkcji $f(x) = e^x$, gdzie $x \in (0, 2\pi)$ i stosując równość Parsewala, albo wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera tej funkcji oblicz sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Brudnopis (nie będzie zbierany)

Przypomnienie:

Szeregiem Fouriera funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie 2π , całkowalnej na przedziale długości 2π , nazywamy szereg

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) ,$$

gdzie

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_A^{A+2\pi} f(x) \sin nx dx$$

Równość Parsevala:

$$\int_A^{A+2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Powyższe całki nie zależą od wyboru A .

