

Egzamin A2/Rzeszotnik/05 luty 2014/część pierwsza - 80 minut
progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.)

a) (2 pkt.) Udowodnij, że $f(x) = \sqrt{\arctg(x)}$ jest wklęsła dla $x > 0$.

b) (3 pkt.) Pokaż, że

$$\sqrt{\pi} \frac{3 + \sqrt{3}}{12} \leq \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\arctg(x)} dx$$

Wsk. wklęsłość + metoda “na trapezik”

2. (5pkt.) Czy istnieją parametry $p \in \mathbb{R}$, dla których całka

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p - 1} dx \quad (*)$$

jest zbieżna? Jeśli potrafisz rozwiązać ten problem, to dowód zamieść poniżej. Jeśli nie potrafisz, to zbadaj zbieżność tej całki dla czterech wybranych przez Ciebie parametrów p (co da Ci $\min\{N, 4\}$ punktów, gdzie N oznacza ilość poprawnie zbadanych całek), a potem spróbuj swego szczęścia w części “bonus”.

bonus: Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ całka $(*)$ jest zbieżna? (Napisz tylko odpowiedź.)

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) Znajdź trzy liczby: A , B , C , aby prawdą było, że

$$\int_A^e \sin(\ln(y)) y^{\ln(y)+B} dy = C,$$

a A różne jest od e . Uzasadnij odpowiedź. Wsk. $y = e^x$.

4. (5pkt.) Beczka śmiechu. Beczka dębowa na piwo ma 4 decymetry wysokości, a średnica denka jest taka sama jak średnica wieczka i wynosi 2 dm. Wiedząc, że promień krzywizny ścianki beczki wynosi $\sqrt{8}$ dm, oblicz ile piwa mieści się w beczce. (Beczka jest bryłą obrotową uzyskaną przez obrót wokół osi OY obszaru wyznaczonego nierównościami: $x \geq 0$, $|y| \leq 2$, $(x+1)^2 + y^2 \leq 8$. Oblicz objętość beczki.)

Brudnopis (nie będzie zbierany)

