

Zadania egzaminacyjne A2

Całki nieoznaczone

1. (5pkt.) Oblicz całkę $\int \frac{f(x)}{f'(x)} dx$ wybierając funkcję f spośród podanych dziesięciu funkcji:

$$\sin(x), \quad \arctg(x), \quad \sin(x) - \arctg(x), \quad xe^x, \quad x + e^x, \\ \sqrt{x^2 + 1}, \quad \sqrt{x^2 + 1} + 1, \quad \ln(x), \quad x \ln(x), \quad x^x.$$

Uwaga: Za każdą poprawnie wyliczoną całkę otrzymasz 1 pkt.

2. (5pkt.) Rozłóż funkcję $f(x) = \frac{1}{x^n - 1}$ na ułamki proste dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Ilość punktów, które otrzymasz za rozwiązanie tego zadania wynosi $\min\{N, 5\}$, gdzie N oznacza liczbę dobrze dokonanych przez Ciebie rozkładów.

3. Oblicz całkę

$$\int \frac{x^p}{x^{77} - 1} dx,$$

dla wskazanych przez Ciebie wartości $p \in \mathbb{R}$. Ilość punktów, które otrzymasz za rozwiązanie tego zadania wynosi $\min\{P, 5\}$, gdzie P oznacza ilość wskazanych przez Ciebie wartości p .

Całki oznaczone

4. (5pkt.) Znajdź granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n^3}{(2n+k)^4 - n^4} \right).$$

5. Oblicz całkę dla wybranego przez siebie parametru p (w podanych ograniczeniach)

a) (2 pkt.) Parametr $p > 0$

$$\int_1^4 x^{-p} e^{x^p} dx$$

b) (3 pkt.) Parametr $p > 1$

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{p}} e^{x^p} dx$$

6. (5pkt.) Oblicz całki i podaj tylko odpowiedzi (każda za pół pkt.)

a) $\int_0^1 x^4 dx = \dots\dots$

b) $\int_0^\pi \sin(x) dx = \dots\dots$

c) $\int_0^\pi \sin^2(x) dx = \dots\dots$

d) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2 - x} dx = \dots\dots$

e) $\int_0^1 \ln(x) dx = \dots\dots$

f) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \dots\dots$

$$\text{g)} \int_0^1 e^x dx = \dots\dots$$

$$\text{h)} \int_0^1 x e^x dx = \dots\dots$$

$$\text{i)} \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \dots\dots$$

$$\text{j)} \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x \ln x} dx = \dots\dots$$

7. (5pkt.) Oblicz całkę

$$\int_0^1 \ln^2 x dx.$$

8. (5pkt.) Używając indukcji matematycznej udowodnij, że dla wszystkich $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

a) (2 pkt.) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^n = 0.$

b) (3 pkt.) $\int_0^1 (\ln x)^n dx = (-1)^n n!$

9. (5pkt.) Oblicz całkę dla $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^1 x^n \ln(x) dx$$

10. (5pkt.) Spośród czterech całek:

$$\int_0^\pi \sin(\sin(x)) dx, \quad \int_0^\pi \sin(\cos(x)) dx, \quad \int_0^\pi \cos(\sin(x)) dx, \quad \int_0^\pi \cos(\cos(x)) dx$$

wybierz jedną i udowodnij, że jest ona równa zero.

11. (5pkt.) Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi

$$y = x^2, \quad y = \frac{2}{x^2 + 1}.$$

12. (5pkt.) Oblicz pole ograniczone wykresami funkcji $\sin x$ oraz $\frac{2}{\pi}x$.

13. (5pkt.) Oblicz pole elipsy ograniczonej krzywą o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

14. (5pkt.) Znajdź objętość bryły uzyskanej w wyniku obrotu wokół osi OY obszaru ograniczonego krzywą $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

15. (5pkt.) Kulę o promieniu 1 przecięto płaszczyzną na dwie części. Oblicz objętość mniejszej części w zależności od jej grubości, którą możesz przyjąć jako **g**.

16. (5pkt.) Beczka dębowa ma 4 decymetry wysokości, a średnica denka jest taka sama jak średnica wieczka i wynosi 2 dm. Wiedząc, że promień krzywizny ścianki beczki wynosi $2\sqrt{2}$ dm, oblicz objętość beczki. (Beczka jest bryłą obrotową uzyskaną przez obrót wokół osi OX obszaru wyznaczonego nierównościami: $y \geq 0, |x| \leq 2, (y+1)^2 + x^2 \leq 8$.)

17. (5pkt.) Stożek o wysokości H i promieniu podstawy r przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy i odległą od niej o x . Oblicz pole $P(x)$ tak powstałego przekroju i całkę $\int_0^H P(x) dx$. Porównaj swój wynik z objętością stożka.

18. (5pkt.) Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Udowodnij, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ mamy, że

$$f(x+y) = f(x) + y \int_0^1 f'(x+ty) dt$$

19. (5pkt.)

a) (2 pkt.) Udowodnij, że $f(x) = \sqrt{\arctg(x)}$ jest wklęsła dla $x > 0$.

b) (3 pkt.) Pokaż, że

$$\sqrt{\pi} \frac{3 + \sqrt{3}}{12} \leq \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\arctg(x)} dx$$

Wsk. wklęsłość + metoda “na trapezik”

20. (5pkt.) Udowodnij, że

$$\frac{\pi}{2} \leq \int_0^1 \frac{e^{x^2} + 1}{\sin(x^2) + 1} dx \leq e$$

Wsk. Spokojnie oszacuj funkcję.

21. (5pkt.) Udowodnij, że

$$\ln\left(\frac{2e}{1+e}\right) \leq \int_0^1 \frac{\sin(x^2) + 1}{e^{x^2} + 1} dx \leq \frac{2}{3}$$

22. (5pkt.) Znajdź liczbę naturalną N spełniającą równanie

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{N}$$

23. (5pkt.) Udowodnij, że

$$1 \leq \int_0^1 \frac{x}{\sin x} dx \leq \frac{\pi}{2}.$$

Całki niewłaściwe

24. (5pkt.) Oblicz całkę

$$\int_1^\infty \frac{\arctg(x)}{x^2} dx$$

25. (5pkt.) Oblicz całkę

$$\int_1^\infty \frac{2x^2}{x^4 - 1} dx$$

26. (5pkt.) Zbadaj zbieżność całki

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

Wskazówka. Odetnij się od zera ($\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^1 \cos(x^2) dx + \int_1^\infty \cos(x^2) dx$), a potem... raz przez podstawienie i raz przez części.

27. (5pkt.) Zbadaj zbieżność całki

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

Wsk. Odetnij się od zera, a potem przez części.

28. (5pkt.) Zbadaj zbieżność całki

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

29. (5pkt.)

a) (2 pkt.) Obliczając całkę $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ wyprowadź wzór na pochodną funkcji $\arcsin(x)$

b) (3 pkt.) Zbadaj zbieżność całki

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \sin(x)} dx$$

30. (5pkt.) Czy istnieją parametry $p \geq 0$, dla których całka

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p - 1} dx \quad (*)$$

jest zbieżna? Jeśli potrafisz rozwiązać ten problem, to dowód zamieść poniżej. Jeśli nie potrafisz, to zbadaj zbieżność tej całki dla czterech wybranych przez Ciebie parametrów p (co da Ci $\min\{N, 4\}$ punktów, gdzie N oznacza ilość poprawnie zbadanych całek), a potem spróbuj swego szczęścia w części “bonus”.

bonus: Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ całka (*) jest zbieżna? (Napisz tylko odpowiedź.)

31. (5pkt.) Zbadaj zbieżność całek. Napisz **Z** jeśli zbieżna lub **R** jeśli rozbieżna (Za każdy podpunkt otrzymasz jeden punkt, za podanie czterech bezbłędnych odpowiedzi. Ponadto za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz 4 punkty, a za udzielenie poprawnych odpowiedzi w **10 podpunktach** otrzymasz dodatkowo **1 pkt.**)

a) $\int_1^2 \frac{1}{\ln x} dx$

$\int_0^1 \frac{e^t}{t} dt$

$\int_2^\infty \frac{1}{\ln x} dx$

$\int_1^\infty \frac{e^t}{t} dt$

b) $\int_0^1 \frac{x^{2012} + 1}{x^{2013} + 2} dx$

$\int_1^\infty \frac{x^{2012} + 1}{x^{2013} + 2} dx$

$\int_0^\infty \frac{x^{2012} + 1}{x^{2013} + 2} dx$

$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2012} + 1}{x^{2013} + 2} dx$

c) $\int_0^\infty \frac{x^3 + \ln x}{x^5 + 1} dx$

$\int_0^1 \frac{x^3 + \ln x}{x^5 + 1} dx$

$\int_1^\infty \frac{x^3 + \ln x}{x^5 + 1} dx$

$\int_{-1}^0 \frac{x^3 + \ln|x|}{x^5 + 1} dx$

d) $\int_0^1 \ln x dx$

$\int_0^1 \frac{1}{\ln x} dx$

$\int_1^\infty \ln x dx$

$\int_1^\infty \frac{1}{\ln x} dx$

32. (5pkt.) a) (2 pkt.) Zbadaj zbieżność całki

$$\int_0^1 \frac{x^3 + \sqrt{x}}{\sqrt{x^7} + x^\pi} dx$$

b) (2 pkt.) Zbadaj zbieżność całki

$$\int_1^\infty \frac{x^3 + \sqrt{x}}{\sqrt{x^7} + x^\pi} dx$$

c) (1 pkt.) Czy całka $\int_0^\infty \frac{x^3 + \sqrt{x}}{\sqrt{x^7} + x^\pi} dx$ jest zbieżna? Napisz tylko **TAK** lub **NIE**. Uwaga: punkt uzyskasz tylko wtedy jeśli Twoje odpowiedzi do pytań a) oraz b) będą poprawne.