

Zadania egzaminacyjne A2

Szeregi

1. (5pkt.) (Egzamin licencjacki luty 2015) Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{6n}}{(2n)! \cdot n^{pn}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p , aby promień ten był dodatni i skończony.

2. (5pkt.) Oblicz sumę

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

Wsk. Znajdź sumę szeregu $\sum (n+1)x^n$ całkując go.

3. (5pkt.) Korzystając z rozwinięcia funkcji \arctg :

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{udowodnij, że } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

4. (5pkt.) Podaj promień zbieżności R szeregu rzeczywistego ($x \in \mathbb{R}$) oraz zespolonego ($z \in \mathbb{C}$). Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-5)$ punktów.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{\sqrt{n^3+2}+n^2} x^n \quad R = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+n^2+1} - \sqrt{n^3} \right) x^n \quad R = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n+2)^n} x^n \quad R = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{n^n} \quad R = \dots\dots\dots$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n \quad R = \dots\dots\dots$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} z^n \quad R = \dots\dots\dots$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{i+n} \quad R = \dots\dots\dots$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{1+2+\dots+n} \quad R = \dots\dots\dots$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(3+4i)^n} \quad R = \dots\dots\dots$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + i^n) z^n \quad R = \dots\dots\dots$

5. W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek napisz **ZB**, **ZW**, lub **R**:

ZB - szereg jest **Z**bieżny **B**ezwzględnie

ZW - szereg jest **Z**bieżny **W**arunkowo

R - szereg jest **R**ozbieżny

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+n^4} \dots\dots\dots$

- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3 + n^2}$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1}$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n 3^{-n^2}$
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$
- f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$
- g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^2}$
- h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{n+i}\right)^n$
- i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-i}$
- j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+i} + \frac{1}{n-i}\right)$

6. (5pkt.) Wyznacz obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^2} z^n$$

7. (5pkt.) W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek napisz **ZB**, **ZW**, lub **R**:

ZB - szereg jest **Z**bieżny **B**ezwzględnie

ZW - szereg jest **Z**bieżny **W**arunkowo

R - szereg jest **R**ozbieżny

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia.

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \frac{1}{n^2}$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \frac{1}{n}$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-\pi)^n \frac{n!}{n^n}$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{arctg}(n)}$
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{\operatorname{arctg}(n)}\right)$
- f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$
- g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^2}$
- h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{2n}}{2^n n}$
- i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3i}{3-2i}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$
- j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n^3}}{n}$

8. (5pkt.) Udowodnij, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{P}{P-1},$$

gdzie P jest ilością punktów, które pragniesz otrzymać za poprawne rozwiązanie tego zadania.

9. (5pkt.) Wyznacz dziedzinę i asymptoty funkcji

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}.$$

10. (5pkt.) W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek napisz **ZB**, **ZW**, lub **R**:
ZB - szereg jest **Zbieżny Bezwzględnie**, **ZW** - szereg jest **Zbieżny Warunkowo**, **R** - szereg jest **Rozbieżny**. **UWAGA: Oprócz odpowiedzi podaj również uzasadnienie.**

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-\sqrt{8})^n \frac{n!}{n^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n}}$

11. (5pkt.) Wyznacz promień zbieżności podanego szeregu potęgowego (3pkt.) oraz przedział zbieżności tego szeregu (1pkt. za każdy koniec przedziału wraz z poprawnym uzasadnieniem).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$$

12. (5pkt.) Z poniższych sum wybierz JEDNĄ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n n(n-1)}$$

i ją oblicz (4 pkt.). Wybierz tylko jedną sumę. Jeśli chcesz obliczać więcej niż jedną sumę, to oblicz wszystkie za 5 pkt.