

Egzamin A1/Rzeszotnik/22.06.11 część pierwsza - 80 minut

progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 pkt.**

1.1. Czy o liczbie zespolonej z można wywnioskować, że **nie** jest rzeczywista jeśli wiadomo, że

a) $z^4 = -1$

b) $z + \frac{1}{z} = \sqrt{e}$

c) $z^2 + (1+i)z + i = 0$

d) $\operatorname{Re}(z+1) = \operatorname{Im}\bar{z}$

1.2. Czy podane równanie ma rozwiązanie?

a) $n^n = 27, \quad n \in \mathbb{N}$

b) $\frac{q^4+1}{q^2-1} = 2, \quad q \in \mathbb{Q}$

c) $\ln x + \cos x = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

d) $|z^2 + z| = 1, \quad z \in \mathbb{C}$

1.3. Czy ciąg (a_n) określony podanym wzorem jest monotoniczny (tzn. rosnący lub malejący)

a) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

b) $a_n = \sin\left(\frac{2}{n}\right)$

c) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$

d) $a_{n+1} = a_n^2 - n, \quad a_1 = 2$

1.4. Czy podana nierówność jest prawdziwa

a) $n \leq 2^n, \quad n \in \mathbb{N}$

b) $q^2 < 3^q, \quad q \in \mathbb{Q}$

c) $1 + 2 \sin x \cos x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$

d) $|z^2 + 2| > 1, \quad z \in \mathbb{C}$

2. (5pkt.) W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek napisz **0**, **1**, lub **2**:

0 - funkcja nie ma asymptot

1 - funkcja ma jedną asymptotę

2 - funkcja ma dwie asymptoty

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) x

b) x^2

c) $\frac{1}{x}$

d) $\ln x$

e) $\frac{\ln x}{x}$

f) $e^{\frac{1}{x}}$

g) $\frac{x^5 + x + 1}{x^4 + x^2 + 1}$

h) $\sin x$

i) $\frac{\sin x}{x^2 + 1}$

j) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

3.1. $A = \{x : x^3 < -8, x \in \mathbb{R}\}$

Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

3.2. $B = \left\{ \frac{n^3 + m^3}{m + n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

3.3. $C = \left\{ \frac{mn}{m^3 + n^3 + 1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

3.4. $D = \{z - 1 : |z| = 1, z \in \mathbb{C}\}$

Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

3.5. $E = \{x^2 + 4y^2 + 4xy : x, y \in \mathbb{R} \wedge 2 \leq x < 7 \wedge -3 < y \leq 4\}$

Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Podaj promień zbieżności R szeregu rzeczywistego ($x \in \mathbb{R}$) oraz zespolonego ($z \in \mathbb{C}$). Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{\sqrt{n^3 + 2} + n^2} x^n \quad R = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3 + n^2 + 1} - \sqrt{n^3} \right) x^n \quad R = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n + 2)^n} x^n \quad R = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{n^n} \quad R = \dots\dots\dots$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n \quad R = \dots\dots\dots$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} z^n \quad R = \dots\dots\dots$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{i + n} \quad R = \dots\dots\dots$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{1+2+\dots+n} \quad R = \dots\dots\dots$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(3 + 4i)^n} \quad R = \dots\dots\dots$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + i^n) z^n \quad R = \dots\dots\dots$

Brudnopis (nie będzie zbierany)