

Egzamin A1/Rzeszotnik/29.05.12 część pierwsza - 80 minut

progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udzieli 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba zespolona z , że

a) $z^2 = i$

b) $\left| \frac{z^3+1}{z^2-1} \right| = 7$

c) $|z| > \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$

d) $|z| > |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

1.2. Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

a) Jeśli szeregi $\sum a_n$ oraz $\sum b_n$ są zbieżne warunkowo, to szereg $\sum(a_n + b_n)$ jest zbieżny warunkowo.

b) Jeśli szeregi $\sum a_n$ oraz $\sum b_n$ **nie** są zbieżne warunkowo, to szereg $\sum(a_n + b_n)$ **nie** jest zbieżny warunkowo.

c) Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ istnieje $\epsilon > 0$ taki,

że $|f(x) - f(y)| < \epsilon$

d) Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **nie** jest ciągła, to dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ istnieje $\epsilon > 0$ taki,

że $|f(x) - f(y)| < \epsilon$

1.3. Czy podany ciąg dąży do $+\infty$?

a) $n^3 - \sqrt[3]{n^9 - n^5}$

b) $n^3 - \sqrt[3]{n^9 - n^6}$

c) $n^3 - \sqrt[3]{n^9 - n^7}$

d) $n^3 - \sqrt[3]{n^9 - n^8}$

1.4. Czy podane oszacowanie jest prawdziwe dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?

a) $\left| \frac{x^4 + x^2}{x^4 + 1} \right| \leq 2$

b) $\left| \frac{x^5 + x^2}{x^5 + 1} \right| \leq 3$

c) $\left| \frac{1}{\sin x + \frac{\epsilon}{\pi}} \right| \leq 10$

d) $\left| \frac{1}{\sin x + \frac{\pi}{e}} \right| \leq 10$

2. (5pkt.) W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek napisz **ZB**, **ZW**, lub **R**:

ZB - szereg jest **Zbieżny Bezwzględnie**

ZW - szereg jest **Zbieżny Warunkowo**

R - szereg jest **Rozbieżny**

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3 + n^4} \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3 + n^2} \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1} \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n 3^{-n^2} \dots\dots\dots$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right) \dots\dots\dots$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \dots\dots\dots$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^2} \dots\dots\dots$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{n+i}\right)^n \dots\dots\dots$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-i} \dots\dots\dots$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+i} + \frac{1}{n-i}\right) \dots\dots\dots$

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

3.1. $A = \{x : e^x < 1, x \in \mathbb{R}\}$

Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots \sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

3.2. $B = \left\{ \frac{3m + 2n^2}{2mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots \sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

3.3. $C = \left\{ \frac{3m^2 + 2n^2}{2mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots \sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

3.4. $D = \{z : |z + 1| = 1, z \in \mathbb{C}\}$

Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots \sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

3.5. $E = \{x^3 - y^2 : x, y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x < 5 \wedge -3 < y \leq 1\}$

Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots \sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Dla każdej z poniższych funkcji podaj ile ma asymptot. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $1 - x$

b) $(x + 1)^3$

c) $\ln|x + e|$

d) $\operatorname{tg}(x)$

e) $\operatorname{arctg}(x)$

f) $\ln|\sin(\cos x)|$

g) $\ln|\cos(\sin x)|$

h) $\frac{x^3 + \sqrt{|x^3 - 1|}}{x^2 + 1}$

i) $\frac{x^3 + \sqrt{|x^5 - 1|}}{x^2 + 1}$

j) $\frac{x^3 + 5x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 4}$