

Egzamin A1/Rzeszotnik/17.06.13 część pierwsza - 80 minut

progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba zespolona z , że

a) $z^2 = -i$

b) $z^6 + 2z^2 + 7 = 0$

c) $z\bar{z} = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$

d) $z\bar{z} = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z + 2$

1.2. Czy podany układ równań ma rozwiązanie w liczbach zespolonych?

a) $\begin{cases} z\bar{z} - z = 2 \\ |z|^2 + 2 = z \end{cases}$

b) $\begin{cases} z^3 + z = 7 \\ \bar{z}^2 = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} z + w = 2 \\ z - w = i \end{cases}$

d) $\begin{cases} z^7 + w^7 = 2 \\ z^7 - w^7 = i \end{cases}$

1.3. Czy podana nierówność jest prawdziwa?

a) $x^6 \leq 6^x, x \in \mathbb{R}$

b) $q^2 + 3q + 2 \geq 0, q \in \mathbb{Q}$

c) $m^3 \leq \pi^m, m \in \mathbb{Z}$

d) $\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n!, n \in \mathbb{N}$

1.4. Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

a) $125^6 - 4^9$ dzieli się przez 3.

b) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to szereg $\sum (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

c) Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

d) Wszystkie Ryśki to fajne chłopaki.

2. (5pkt.) W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek napisz **ZB**, **ZW**, lub **R**:

ZB - szereg jest **Z**bieżny **B**ezwzględnie

ZW - szereg jest **Z**bieżny **W**arunkowo

R - szereg jest **R**ozbieżny

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^n} \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!!} \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \frac{n!}{n^n} \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{1}{n}\right) \dots\dots\dots$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \dots\dots\dots$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \dots\dots\dots$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^3} \dots\dots\dots$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{i}{2^n}\right)^n \dots\dots\dots$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)^n \dots\dots\dots$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n^2}}{n} \dots\dots\dots$

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określiś ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

3.1. $A = \left\{ x : \frac{1}{x^3} < \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R} \right\}$ Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

3.2. $B = \left\{ \frac{1}{2^n - n^2 + \frac{1}{2}} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

3.3. $C = \left\{ \frac{m-n}{m+n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

3.4. $D = \{ |z| : |z+1+i| = 1, z \in \mathbb{C} \}$ Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

3.5. $E = \{ x^2 - 4xy + 4y^2 : x, y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x < 5 \wedge -1 < y \leq 7 \}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Dla każdej z poniższych funkcji podaj ile ma asymptot. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów. **Uwaga:** Asymptot nie liczymy podwójnie.

a) $ex + \pi$

b) $\sqrt[3]{x}$

c) $\frac{x^3}{x^2 + 1}$

d) $\sqrt{x^2 + 1}$

e) $\arctg(x)$

f) $\frac{1}{\sin(x) + \cos(x)}$

g) e^{x-x^2}

h) $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

i) $\left|\frac{x+i}{x-i}\right|$

j) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$