

Egzamin A1/Rzeszotnik/03.09.13 część pierwsza - 80 minut

progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba zespolona z , że

a) $z^2 = 1$

b) $z^8 + z^2 + 1 = 0$

c) $z + \bar{z} = 2\text{Im}z$

d) $z - \bar{z} = 2\text{Re}z + 1$

1.2. Czy podana nierówność ma rozwiązanie w liczbach zespolonych?

a) $|z^2 + 2| < 1$

b) $|z^3 + 3| < 1$

c) $|z + 1| < |z| - 1$

d) $|z + 1|^2 < |z| - 1$

1.3. Czy podana funkcja ma asymptotę?

a) $\ln\sqrt{x^2 + 1}$

b) $\sqrt{(\ln x)^2 + 1}$

c) $\sin(\arctg x)$

d) $\arctg(\sin x)$

1.4. Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

a) Iloczyn funkcji rosnących jest funkcją rosnącą.

b) Jeśli $a_n \geq 0$ oraz $\sum a_n < \infty$ to szereg $\sum (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

c) Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

d) Jeśli funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ istnieje $C > 0$ takie, że

$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$

2. (5pkt.) W każdym z poniższych zdań podaj promień zbieżności R danego szeregu potęgowego. Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad R = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!!} x^n, \quad R = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \frac{n!}{n^n} x^n, \quad R = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) x^n, \quad R = \dots\dots\dots$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n, \quad R = \dots\dots\dots$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} z^n, \quad R = \dots\dots\dots$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i+1}{3i-4}\right)^n z^n, \quad R = \dots\dots\dots$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{i}{2^n}\right)^n z^n, \quad R = \dots\dots\dots$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)^n z^n, \quad R = \dots\dots\dots$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + i^n}{3n^3 + i^n} z^n, \quad R = \dots\dots\dots$

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określiś ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

3.1. $A = \left\{ x : \frac{1}{x^4} < \frac{1}{x^3}, x \in \mathbb{R} \right\}$ Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots \sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

3.2. $B = \left\{ \frac{1}{e^n - n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots \sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

3.3. $C = \left\{ \frac{3m^2 + 4n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots \sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

3.4. $D = \{ |z - i| : |z - 1 + i| = 1, z \in \mathbb{C} \}$ Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots \sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

3.5. $E = \{ x^2 - 4xy : x, y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x < 5 \wedge -1 < y \leq 7 \}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots \sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Podaj wartości granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia). Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\sin(\frac{1}{n})} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2 + 1)}{\ln(n)} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{n-1}}{7^n} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(n) + 1}{\cos(n) + 7} \right)^n = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \dots\dots\dots$

g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \dots\dots\dots$

h) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \dots\dots\dots$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1+i)^n + i^n}{(1-i)^n - i^n} \right| = \dots\dots\dots$

j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(|\sqrt{x} + i|)}{x} = \dots\dots\dots$