

Egzamin A1/Rzeszotnik/17.06.14 część pierwsza - 80 minut

progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udzieli 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba **zespółona** z , że

a) $z^3 = (1 + i)^4$

b) $z^6 + z^2 + e = \pi$

c) $\operatorname{Re}(\operatorname{Re} z) + 2014 \leq \operatorname{Im}(\operatorname{Im} z)$

d) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z+1}\right) < \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+1}\right)$

1.2. Czy istnieje taka liczba **rzeczywista** z , że

a) $z^3 = (1 + i)^4$

b) $z^6 + z^2 + e = \pi$

c) $\operatorname{Re}(\operatorname{Re} z) + 2014 \leq \operatorname{Im}(\operatorname{Im} z)$

d) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z+1}\right) < \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+1}\right)$

1.3. Czy podana nierówność jest prawdziwa?

a) $n^2 \leq 2^n, n \in \mathbb{N}$

b) $n^3 \leq 3^n, n \in \mathbb{N}$

c) $n^2 \leq 2^n, n \in \mathbb{Z}$

d) $n^3 \leq 3^n, n \in \mathbb{Z}$

1.4. Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

a) Każdy ciąg malejący jest zbieżny.

b) Istnieje liczba wymierna w taka, że $w^5 + 3w^3 + 2 = \sqrt{712}$

c) Jeśli dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje stała $C > 0$ taka, że $\forall x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^2$, to funkcja f jest ciągła.

d) Jeśli $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to szereg $\sum (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

2. (5pkt.) W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek napisz **ZB**, **ZW**, lub **R**:

ZB - szereg jest **Zbieżny Bezwzględnie**

ZW - szereg jest **Zbieżny Warunkowo**

R - szereg jest **Rozbieżny**

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia.

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \frac{1}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-\pi)^n \frac{n!}{n^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctg(n)}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{\arctg(n+1)}{\arctg(n)}\right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^2}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{2n}}{2^n n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3i}{3-2i}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n^3}}{n}$

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określiś ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

3.1. $A = \left\{ x : 1 + \frac{1}{x} < 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

3.2. $B = \left\{ \sin\left(\frac{2}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

3.3. $C = \left\{ \frac{m^3 + n^3 + 64}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

3.4. $D = \left\{ |z| : \operatorname{Im}\left(\frac{z}{z+1}\right) < \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+1}\right), z \in \mathbb{C} \right\}$ Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

3.5. $E = \{x^2 - y^2 : x, y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x < 1 \wedge -1 < y \leq 3\}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Podaj wartości granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia).

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{n + \sqrt{2}}{n} \right) = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\arctg(n)}{\ln(n)} \right)^n = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n + i \sin(n)}{n + i \cos(n)} \right| = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 4x - 4} = \dots\dots\dots$

g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln |\cos(\cos x)| = \dots\dots\dots$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\arctg(x)}{x} \right)^x = \dots\dots\dots$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \dots\dots\dots$

j) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = \dots\dots\dots$