

Egzamin A1/Rzeszotnik/02.09.14 część pierwsza - 80 minut

progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba **naturalna** n , że

a) $n^2 > 2^n$

b) $n^3 > 3^n$

c) $\sqrt{n} > \frac{n+1}{2}$

d) $2n! > n^{n+1}$

1.2. Czy istnieje taka liczba **wymierna** w , że

a) $w^2 + w - 2 = 0$

b) $w^2 + w - 2 = 1$

c) $w^4 > 4^w$

d) $\log_2 w = \frac{3}{2}$

1.3. Czy istnieje taka liczba **rzeczywista** r , że

a) $r^4 = -1$

b) $r^3 + r^2 + 2014 = 0$

c) $|r^2 + r| = -r^2 + r - \frac{1}{2014}$

d) $\ln(r) = \operatorname{tg}(r)$

1.4. Czy istnieje taka liczba **zespólona** z , że

a) $z^2 = -1$

b) $z^7 = i$

c) $|z^2 + z| = |z - 1|$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1+z}$

2. (5pkt.) W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek napisz **ZB**, **ZW**, lub **R**:

ZB - szereg jest **Z**bieżny **B**ezwzględnie

ZW - szereg jest **Z**bieżny **W**arunkowo

R - szereg jest **R**ozbieżny

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia.

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-\frac{\pi}{e}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + \sin(n)}{n^4 + \cos(n)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+i}{1+3i}\right)^n$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1}\right)^n$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (2+i)^n \ln \left| \frac{n-i}{n+i} \right|$

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

3.1. $A = \left\{ x : \frac{1}{x} < 2, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

3.2. $B = \{n^2 > 2^n : n \in \mathbb{N}\}$ Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

3.3. $C = \left\{ \frac{ne - m\pi}{(n + \pi)(m + e)} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

3.4. $D = \left\{ |z| : |z - (1 + i)| = \sqrt{2}, z \in \mathbb{C} \right\}$ Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

3.5. $E = \{x^2 - y^2 : x, y \in \mathbb{R} \wedge |x - y| < 2 \wedge |x + y + 1| \leq 3\}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Podaj wartości granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia).
Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(n) = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{2^n n!} = \dots\dots\dots$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{(2n^2+1)(n+2)} = \dots\dots\dots$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \dots\dots\dots$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \dots\dots\dots$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+7}\right)^{n^2} = \dots\dots\dots$