

Egzamin A1/Rzeszotnik/23.06.15 część pierwsza - 80 minut

progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba **zespólona** z , że

a) $z^2 = i^3$

b) $8z^8 + 4z^4 + 2z^2 + 2015 = 0$

c) $|z^3 + \frac{1}{z}| = 2015$

d) $\frac{z+1}{z-1} = \operatorname{Im}(z)$

1.2. Czy istnieje taka liczba **rzeczywista** z , że

a) $z^2 = i^3$

b) $8z^8 + 4z^4 + 2z^2 + 2015 = 0$

c) $|z^3 + \frac{1}{z}| = 2015$

d) $\frac{z+1}{z-1} = \operatorname{Im}(z)$

1.3. Czy podana nierówność jest prawdziwa?

a) $\left|z + \frac{1}{z}\right| \geq 2, z \in \mathbb{C}$

b) $\left|r + \frac{1}{r}\right| \geq 2, r \in \mathbb{R}$

c) $q^4 \leq 4^q, q \in \mathbb{Q}$

d) $n^4 \leq 4^n, n \in \mathbb{N}$

1.4. Niech (a_n) będzie ciągiem takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \in \mathbb{R}$. Czy wówczas prawdą jest że

a) $\forall_{\epsilon > 0} \exists_N \forall_{n > N} |a_n - g| < \epsilon$

b) $\forall_{\epsilon \geq 0} \exists_N \forall_{n > N} |a_n - g| < \epsilon$

c) $\forall_{\epsilon > 0} \exists_N \forall_{n \geq N} |a_n - g| < \epsilon$

d) $\forall_{\epsilon > 0} \exists_N \forall_{n > N} |a_n - g| \leq \epsilon$

2. (5pkt.) W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek napisz **ZB**, **ZW**, lub **R**:

ZB - szereg jest **Zbieżny Bezwzględnie**

ZW - szereg jest **Zbieżny Warunkowo**

R - szereg jest **Rozbieżny**

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia.

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^6 + 1}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-\sqrt{5})^n \frac{n!}{n^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sin\left(\frac{n}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} i^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n+i}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(n+i)^2}$

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

3.1. $A = \left\{ x : x < \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

3.2. $B = \left\{ \frac{2m+8n}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

3.3. $C = \left\{ \frac{2m^2+8n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

3.4. $D = \{ |z| : |z - (3 + 4i)| = 1, z \in \mathbb{C} \}$ Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

3.5. $E = \{ 2x + xy : x, y \in \mathbb{R} \wedge -3 \leq x < 2 \wedge -3 < y \leq 2 \}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Podaj wartości granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia).

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg(\sqrt[n]{n}) = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin(n)}}{n} = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n + \pi) - \ln(n + e)) = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \dots\dots\dots$

g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^5 + 1} = \dots\dots\dots$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = \dots\dots\dots$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + \sqrt[3]{|x^9 + 6|} = \dots\dots\dots$

j) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \dots\dots\dots$