

Egzamin A1/Rzeszotnik/20.06.16 część pierwsza - 80 minut

progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba zespolona z , że

a) $z^2 = -i$

b) $z^5 + z^3 + \frac{1}{z} = 0$

c) $z^2 = |z| + 1$

d) $z^2 = |z| - 1$

1.2. Czy istnieje taka liczba wymierna w , że

a) $w^2 = 2^3$

b) $w^3 + w^2 + 2w + 2 = 0$

c) $\log_2(w) = 3$

d) $\log_w(2) = 3$

1.3. Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

a) Jeśli szeregi $\sum a_n$ oraz $\sum b_n$ są zbieżne bezwzględnie, to szereg $\sum(a_n + b_n)$ jest zbieżny bezwzględnie.

b) Jeśli szeregi $\sum a_n$ oraz $\sum b_n$ **nie** są zbieżne bezwzględnie, to szereg $\sum(a_n + b_n)$ **nie** jest zbieżny bezwzględnie.

c) Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest rosnąca i ograniczona, to ma asymptotę.

d) Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to ma asymptotę.

1.4. Czy podane oszacowanie jest prawdziwe dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?

a) $\left| \frac{\sin(x)}{x^2 + 1} \right| \leq 1$

b) $\left| \frac{x^5 + x^2}{x^5 + 2} \right| \leq 2016$

c) $\left| e^{\arctg(x)} \right| \leq 9$

d) $|\cos(\sin(x))| \geq \frac{1}{2}$

2. (5pkt.) W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek napisz **ZB**, **ZW**, lub **R**:

ZB - szereg jest **Z**bieżny **B**ezwzględnie

ZW - szereg jest **Z**bieżny **W**arunkowo

R - szereg jest **R**ozbieżny

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia.

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-\sqrt{8})^n \frac{n!}{n^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\cos\left(\frac{n}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^2}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^3}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3i}{n+i} \right)^n$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{2n}}{n2^n}$

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

3.1. $A = \left\{ x : x < \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\}$ Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

3.2. $B = \left\{ \frac{2m-8n}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

3.3. $C = \left\{ \frac{3m^2+5n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

3.4. $D = \{ |z| : |z-i| = 2, z \in \mathbb{C} \}$ Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

3.5. $E = \{ 3x - xy : x, y \in \mathbb{R} \wedge -3 \leq x < 2 \wedge -3 < y \leq 2 \}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Podaj wartości granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia).

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7}{5^n} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln(n)} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\operatorname{arctg}(n)) = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\cos(n)} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\ln(n)}} = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \dots\dots\dots$

g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^5}{x^5 + 1} = \dots\dots\dots$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\operatorname{arctg}(x)} = \dots\dots\dots$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 6x^2}) = \dots\dots\dots$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+4}\right)^x = \dots\dots\dots$