

Imię:

Nazwisko:

Uwaga: W części otwartej należy uzasadniać swoje odpowiedzi :)

5. (5pkt.) Wyznacz taką liczbę $A \in \mathbb{R}$, że funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{e^x - 1 - x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Oblicz również $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

6. (5pkt.) Uzasadnij, że przedział $[0, 1]$ zawiera rozwiązanie równania

$$x^3 = \cos(x)$$

(za 2pkt.) oraz wskaż przedział $[a, b] \subset [0, 1]$ o długości mniejszej niż $\frac{1}{4}$ zawierający rozwiązanie tego równania (za 3pkt.).

Wsk. Sprawdź, co się dzieje dla $x = \frac{\pi}{4}$ korzystając z tego, że $\pi^3 < 2^5$.

Imię:

Nazwisko:

7. (5pkt.)

a) (2pkt.) Znajdź największą wartość funkcji $g(x) = |x|e^{-x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$. (**Wsk.** g jest parzysta, więc wystarczy zrobić to dla $x \geq 0$.)

b) (3pkt.) Wykaż, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$

$$|e^{-x^2} - e^{-y^2}| \leq |x - y|$$

Wsk. Wykorzystaj tw. Lagrange'a i punkt **a**).

8. (5pkt.)

a) (2pkt) Wykaż, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n).$$

Wsk. $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

b) (3pkt.) Skorzystaj z punktu **a)**, aby udowodnić, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} < \ln(2).$$