

Egzamin A1/Rzeszotnik/25.06.18 część pierwsza - 80 minut
progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.) Podaj pochodną danej funkcji zmiennej x (podaj tylko odpowiedzi). Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $(x^\alpha)' =$

b) $(a^x)' =$

c) $(\log_a x)' =$

d) $\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)' =$

e) $(\operatorname{arctg}(\sqrt{x}))' =$

f) $(\operatorname{ctg}(x^3))' =$

g) $(\sqrt[3]{x} \cos(\ln x))' =$

h) $\left(\frac{x^2 e^x}{\ln x + x}\right)' =$

i) $\left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2+2}}\right)' =$

j) $((e^x + e) \operatorname{arctg}(1-x) \log_x(e))' =$

2. (5pkt.) Podaj wartości granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia). Jeśli granica nie istnieje napisz **NI**

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7}{2^n} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^e}{\log_2(n)} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(n\pi))^{n^2} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{3n-4} \right)^n = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n-4} \right)^n = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\arctg(x) - \frac{\pi}{4}} = \dots\dots\dots$

g) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x - \pi} = \dots\dots\dots$

h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \dots\dots\dots$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 2}) = \dots\dots\dots$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \dots\dots\dots$

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

3.1. $A = \left\{ x : x + 1 < \frac{2}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

3.2. $B = \left\{ \frac{n+1}{n^2-3} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

3.3. $C = \left\{ \frac{mn}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

3.4. $D = \{ |x-2| : |x-1| < 3, x \in \mathbb{R} \}$ Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

3.5. $E = \{ x^2 + xy + 1 : x, y \in \mathbb{R} \wedge -3 \leq x < 2 \wedge -4 < y \leq 1 \}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udzieli 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
 Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
 Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba naturalna n , że

a) $n^2 > 2^n$

b) $n^3 > 3^n$

c) $n + 2 = 2^n$

d) $n + 3 = 3^n$

1.2. Czy istnieje taka liczba wymierna w , że

a) $w + \frac{1}{w} = 1$

b) $w^2 = |w| + 1$

c) $\log_3(w) + \sqrt{w} \in \mathbb{Q}$

d) $e^w < w + \frac{\pi}{e}$

1.3. Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

a) Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to f ma własność Darboux.

b) Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to f' ma własność Darboux.

c) Każdy ciąg monotoniczny ma granicę.

d) Każdy ciąg monotoniczny jest zbieżny.

1.4. Czy podana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?

a) $\left| \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| \leq 1$

b) $\left| \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + 1} \right| \leq 2018$

c) $e^{\sin(x)} \leq \cos(x)$

d) $e^{\sin(x)} \geq \cos(x)$