Egzamin A1/Rzeszotnik/13.06.19

Imię:

Nazwisko:

1. (2pkt.) Wyznacz dziedzinę i asymptoty funkcji

$$f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}\,.$$

2. (2pkt.) Zbadaj znak pochodnej funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}$ i użyj uzyskanej informacji (**oraz informacji uzyskanych w poprzednim zadaniu**) do tego, aby naszkicować wykres funkcji f.

Imię:

Nazwisko:

3. (2pkt.) Korzystajac z twierdzenia Lagrange'a dla funkcji $f(x) = \ln(x)$ udowodnij, że

$$\frac{1}{19} < \ln\left(\frac{19}{18}\right) < \frac{1}{18}.$$

Przypomnienie: Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.
Jeśli f jest różniczkowalna oraz $a < b$ to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

4. (2pkt.) Opakowanie na klej składający się z dwóch komponentów ma mieć kształt walca (o wysokosci h i promieniu podstawy r) przedzielonego na pół pionową przegrodą. Jakie powinny być wymiary tego opakowania (tzn. iloraz $\frac{h}{r}$), aby przy jego ustalonej objętości V pole powierzchni tego opakowania (czyli pole powierzchni całkowitej walca plus pole przegrody) było minimalne.
Wsk. Za ustaloną objętość V możesz przyjąć wybraną przez siebie wartość liczbową wygodną do obliczeń.

Imię:

Nazwisko:

5. (2pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}(n^3\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) - n^2)$$

Wsk. Za zmienną dyskretną $\frac{1}{n}$ podstaw ciągłą zmienną x i użyj de l'Hospitala.

6. (2pkt.) Podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru. **Uzasadnij swą odpowiedź.**

$$A = \left\{ \frac{m^2 + 5n^2}{mn} : \quad m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Imię:

Nazwisko:

7. (2pkt.)

a) (1pkt.) Wykaż, że funkcja $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ jest wklęsła dla $x \geq 0$

b) (2.5pkt.) Wykaż, że dla $y \geq 0$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{2}\right) \geq \frac{\operatorname{arctg}(y)}{2}.$$

Wsk. Użyj punktu a) i nierówności Jensena z $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

8. **(2pkt.)** Niech w_n będzie ciągiem wielomianów zdefiniowanym rekurencyjnie przez $w_1(x) = 2x$, $w_{n+1}(x) = 2x \cdot w_n(x) + w_n'(x)$ (gdzie $'$ to pochodna). Udowodnij, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i dla funkcji $f(x) = e^{x^2}$ jej n–ta pochodna wyraża się wzorem:

$$f^{(n)}(x) = e^{x^2} \cdot w_n(x)$$