

Zadania egzaminacyjne A1/Rzeszotnik

Zestaw E1

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba zespolona z , że

a) $z^2 = -i$

b) $z^5 + z^3 + \frac{1}{z} = 0$

c) $z^2 = |z| + 1$

d) $z^2 = |z| - 1$

1.2. Czy istnieje taka liczba wymierna w , że

a) $w^2 = 2^3$

b) $w^3 + w^2 + 2w + 2 = 0$

c) $\log_2(w) = 3$

d) $\log_w(2) = 3$

1.3. Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

a) Każdy ciąg monotoniczny ma granicę.

b) Każdy ciąg monotoniczny jest zbieżny.

c) Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest rosnąca i ograniczona, to ma asymptotę.

d) Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to ma asymptotę.

1.4. Czy podane oszacowanie jest prawdziwe dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?

a) $\left| \frac{\sin(x)}{x^2 + 1} \right| \leq 1$

b) $\left| \frac{x^5 + x^2}{x^5 + 2} \right| \leq 2016$

c) $\left| e^{\arctg(x)} \right| \leq 9$

d) $|\cos(\sin(x))| \geq \frac{1}{2}$

2. (5pkt.) Podaj wartości granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia).

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7}{5^n} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln(n)} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\operatorname{arctg}(n)) = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\cos(n)} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\ln(n)}} = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \dots\dots\dots$

g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^5}{x^5 + 1} = \dots\dots\dots$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\operatorname{arctg}(x)} = \dots\dots\dots$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 6x^2}) = \dots\dots\dots$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+4}\right)^x = \dots\dots\dots$

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

$$\mathbf{3.1.} \quad A = \left\{ x : x < \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf A = \dots\dots\dots \sup A = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

$$\mathbf{3.2.} \quad B = \left\{ \frac{2m-8n}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf B = \dots\dots\dots \sup B = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

$$\mathbf{3.3.} \quad C = \left\{ \frac{3m^2+5n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf C = \dots\dots\dots \sup C = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

$$\mathbf{3.4.} \quad D = \{ |z| : |z-i| = 2, z \in \mathbb{C} \} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf D = \dots\dots\dots \sup D = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

$$\mathbf{3.5.} \quad E = \{ 3x - xy : x, y \in \mathbb{R} \wedge -3 \leq x < 2 \wedge -3 < y \leq 2 \} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf E = \dots\dots\dots \sup E = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Dla każdej z poniższych funkcji podaj ile ma asymptot. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $1 - x$

b) $(x + 1)^3$

c) $\ln|x + e|$

d) $\operatorname{tg}(x)$

e) $\operatorname{arctg}(x)$

f) $\ln|\sin(\cos x)|$

g) $\ln|\cos(\sin x)|$

h) $\frac{x^3 + \sqrt{|x^3 - 1|}}{x^2 + 1}$

i) $\frac{x^3 + \sqrt{|x^5 - 1|}}{x^2 + 1}$

j) $\frac{x^3 + 5x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 4}$

5. (5pkt.) Udowodnij, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 5$ zachodzi nierówność

$$n^2 \leq 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}.$$

6. (5pkt.) Uzasadnij, że przedział $[1, 2]$ zawiera rozwiązanie równania

$$e^x = x^3$$

oraz wskaż przedział o długości 2 zawierający drugie rozwiązanie tego równania.

7. (5pkt.) Niech $f(x) = e^{-x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

a) (1pkt) Naszkicuj wykres funkcji f .

b) (2pkt.) Wykaż, że $f(x) \leq 1$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

c) (2pkt.) Określ zbiór wartości funkcji f .

8. (5pkt.) Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = e^x(x^2 + 2x) \quad \text{dla } x \in [-2, 1].$$

Zestaw E2

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udzieli 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba **zespółona** z , że

a) $z^2 = i^3$

b) $8z^8 + 4z^4 + 2z^2 + 2015 = 0$

c) $|z^3 + \frac{1}{z}| = 2015$

d) $\frac{z+1}{z-1} = \operatorname{Im}(z)$

1.2. Czy istnieje taka liczba **rzeczywista** z , że

a) $z^2 = i^3$

b) $8z^8 + 4z^4 + 2z^2 + 2015 = 0$

c) $|z^3 + \frac{1}{z}| = 2015$

d) $\frac{z+1}{z-1} = \operatorname{Im}(z)$

1.3. Czy podana nierówność jest prawdziwa?

a) $\left|z + \frac{1}{z}\right| \geq 2, z \in \mathbb{C}$

b) $\left|r + \frac{1}{r}\right| \geq 2, r \in \mathbb{R}$

c) $q^4 \leq 4^q, q \in \mathbb{Q}$

d) $n^4 \leq 4^n, n \in \mathbb{N}$

1.4. Niech (a_n) będzie ciągiem takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \in \mathbb{R}$. Czy wówczas prawdą jest że

a) $\forall_{\epsilon > 0} \exists_N \forall_{n > N} |a_n - g| < \epsilon$

b) $\forall_{\epsilon \geq 0} \exists_N \forall_{n > N} |a_n - g| < \epsilon$

c) $\forall_{\epsilon > 0} \exists_N \forall_{n \geq N} |a_n - g| < \epsilon$

d) $\forall_{\epsilon > 0} \exists_N \forall_{n > N} |a_n - g| \leq \epsilon$

2. (5pkt.) Oblicz pochodną funkcji zmiennej x (za każdą bezbłędnie wyliczoną pochodną otrzymasz jeden punkt)

a) $(e^{\cos^2 x})' =$

b) $\left(\left(\frac{\sqrt{x} + 1}{x \sin x} \right)^3 \right)' =$

c) $(\operatorname{arctg}(1 - x^2) \ln(1 + x^2 \operatorname{tg}(x^2)))' =$

d) $\left(\ln \left(e^{x^2} \sqrt{\sin^2 x + 1} \right) \right)' =$

e) $\left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)' =$

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

$$\mathbf{3.1.} \quad A = \left\{ x : x < \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf A = \dots\dots\dots \sup A = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

$$\mathbf{3.2.} \quad B = \left\{ \frac{2m+8n}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf B = \dots\dots\dots \sup B = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

$$\mathbf{3.3.} \quad C = \left\{ \frac{2m^2+8n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf C = \dots\dots\dots \sup C = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

$$\mathbf{3.4.} \quad D = \{ |z| : |z - (3 + 4i)| = 1, z \in \mathbb{C} \} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf D = \dots\dots\dots \sup D = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

$$\mathbf{3.5.} \quad E = \{ 2x + xy : x, y \in \mathbb{R} \wedge -3 \leq x < 2 \wedge -3 < y \leq 2 \} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf E = \dots\dots\dots \sup E = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Podaj wartości granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia).

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg(\sqrt[n]{n}) = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin(n)}}{n} = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n + \pi) - \ln(n + e)) = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \dots\dots\dots$

g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^5 + 1} = \dots\dots\dots$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = \dots\dots\dots$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + \sqrt[3]{|x^9 + 6|} = \dots\dots\dots$

j) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \dots\dots\dots$

5. (5pkt.) Zbadaj dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$n^4 \leq 4^n.$$

6. (5pkt.) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = e^{-x^2}$ i wskaż przedział o długości mniejszej niż $\frac{1}{4}$ zawierający rozwiązanie równania $f(x) = x$.

Wsk. Jako jeden z końców przedziału możesz wskazać $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. (5pkt.) Znajdź największą liczbę naturalną n , taką że dana funkcja jest różniczkowalna w zerze. Oblicz również A oraz $f'(0)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - \frac{1}{1-2x} + 2x^2}{x^n} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$$

8. (5pkt.) Sprawdź, że funkcja $f(x) = x^2 e^{-x}$ jest wypukła dla $x > 4$ (2 pkt.) oraz udowodnij poniższą nierówność dla $x, y > 4$ (3 pkt.)

$$\frac{(x+y)^2}{2} \leq x^2 e^{\frac{y-x}{2}} + y^2 e^{\frac{x-y}{2}}.$$

Zestaw E3

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udzieli 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba **zespólona** z , że

a) $z^3 = (1 + i)^4$

b) $z^6 + z^2 + e = \pi$

c) $\operatorname{Re}(\operatorname{Re} z) + 2014 \leq \operatorname{Im}(\operatorname{Im} z)$

d) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z+1}\right) < \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+1}\right)$

1.2. Czy istnieje taka liczba **rzeczywista** z , że

a) $z^3 = (1 + i)^4$

b) $z^6 + z^2 + e = \pi$

c) $\operatorname{Re}(\operatorname{Re} z) + 2014 \leq \operatorname{Im}(\operatorname{Im} z)$

d) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z+1}\right) < \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+1}\right)$

1.3. Czy podana nierówność jest prawdziwa?

a) $n^2 \leq 2^n, n \in \mathbb{N}$

b) $n^3 \leq 3^n, n \in \mathbb{N}$

c) $n^2 \leq 2^n, n \in \mathbb{Z}$

d) $n^3 \leq 3^n, n \in \mathbb{Z}$

1.4. Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

a) Każdy ciąg malejący jest zbieżny.

b) Istnieje liczba wymierna w taka, że $w^5 + 3w^3 + 2 = \sqrt{712}$

c) Jeśli dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje stała $C > 0$ taka, że $\forall x$ zachodzi nierówność $f'(x) \geq C$, to $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

d) Jeśli dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje stała $C > 0$ taka, że $\forall x$ zachodzi nierówność $f'(x) \geq C$, to $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. (5pkt.) Oblicz pochodną i drugą pochodną funkcji zmiennej x

a) $(e^{x^2})' =$

$$(e^{x^2})'' =$$

b) $\left(\frac{1}{\ln x}\right)' =$

$$\left(\frac{1}{\ln x}\right)'' =$$

c) $\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$

$$\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'' =$$

d) $(\sin(\cos x))' =$

$$(\sin(\cos x))'' =$$

e) $\left(\sqrt[3]{x^2 + 1}\right)' =$

$$\left(\sqrt[3]{x^2 + 1}\right)'' =$$

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

$$\mathbf{3.1.} \quad A = \left\{ x : 1 + \frac{1}{x} < 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf A = \dots\dots\dots \sup A = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

$$\mathbf{3.2.} \quad B = \left\{ \sin\left(\frac{2}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf B = \dots\dots\dots \sup B = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

$$\mathbf{3.3.} \quad C = \left\{ \frac{m^3 + n^3 + 64}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf C = \dots\dots\dots \sup C = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

$$\mathbf{3.4.} \quad D = \left\{ |z| : \operatorname{Im}\left(\frac{z}{z+1}\right) < \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+1}\right), z \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf D = \dots\dots\dots \sup D = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

$$\mathbf{3.5.} \quad E = \{x^2 - y^2 : x, y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x < 1 \wedge -1 < y \leq 3\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf E = \dots\dots\dots \sup E = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Podaj wartości granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia).

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{n + \sqrt{2}}{n} \right) = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\arctg(n)}{\ln(n)} \right)^n = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n + i \sin(n)}{n + i \cos(n)} \right| = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 4x - 4} = \dots\dots\dots$

g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln |\cos(\cos x)| = \dots\dots\dots$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\arctg(x)}{x} \right)^x = \dots\dots\dots$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \dots\dots\dots$

j) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \dots\dots\dots$

5. (5pkt.) Udowodnij, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 4^n$$

6. (5pkt.) Zbadaj, czy dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$|\ln(x^2 + \pi^2) - \ln(x^2 + e^2)| \leq 1$$

7. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}}$$

Wskazówka. de l'Hospital.

8. (5pkt.) Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji.

$$f(x) = \begin{cases} x^\pi \ln(x) & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Zestaw 4

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udzieli 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba **naturalna** n , że

a) $n^2 > 2^n$

b) $n^3 > 3^n$

c) $\sqrt{n} > \frac{n+1}{2}$

d) $2n! > n^{n+1}$

1.2. Czy istnieje taka liczba **wymierna** w , że

a) $w^2 + w - 2 = 0$

b) $w^2 + w - 2 = 1$

c) $w^4 > 4^w$

d) $\log_2 w = \frac{3}{2}$

1.3. Czy istnieje taka liczba **rzeczywista** r , że

a) $r^4 = -1$

b) $r^3 + r^2 + 2014 = 0$

c) $|r^2 + r| = -r^2 + r - \frac{1}{2014}$

d) $\ln(r) = \operatorname{tg}(r)$

1.4. Czy istnieje taka liczba **zespólona** z , że

a) $z^2 = -1$

b) $z^7 = i$

c) $|z^2 + z| = |z - 1|$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1+z}$

2. (5pkt.) Podaj wartości granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia). Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\sin(\frac{1}{n})} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+e}{n+\pi} \right)^n = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+7+7^2+7^3+\dots+7^{n-1}}{7^n} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(n)+1}{\cos(n)+7} \right)^n = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n+1)}{\ln(3^n+1)} = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x^2-3\sqrt{2}x+4} = \dots\dots\dots$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln|\cos(\sin x)| = \dots\dots\dots$

h) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \dots\dots\dots$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\ln x}} = \dots\dots\dots$

j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(|\sqrt{x}+i|)}{x} = \dots\dots\dots$

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

$$\mathbf{3.1.} \quad A = \left\{ x : \frac{1}{x} < 2, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf A = \dots\dots\dots \sup A = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

$$\mathbf{3.2.} \quad B = \{n^2 > 2^n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf B = \dots\dots\dots \sup B = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

$$\mathbf{3.3.} \quad C = \left\{ \frac{ne - m\pi}{(n + \pi)(m + e)} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf C = \dots\dots\dots \sup C = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

$$\mathbf{3.4.} \quad D = \left\{ |z| : |z - (1 + i)| = \sqrt{2}, z \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf D = \dots\dots\dots \sup D = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

$$\mathbf{3.5.} \quad E = \{x^2 - y^2 : x, y \in \mathbb{R} \wedge |x - y| < 2 \wedge |x + y + 1| \leq 3\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf E = \dots\dots\dots \sup E = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Oblicz pochodną i drugą pochodną funkcji zmiennej x

a) $(x^7 e^x)' =$

$$(x^7 e^x)'' =$$

b) $(\operatorname{tg} x)' =$

$$(\operatorname{tg} x)'' =$$

c) $(\log_2(x))' =$

$$(\log_2(x))'' =$$

d) $\left((\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) \right)' =$

$$\left((\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) \right)'' =$$

e) $\left(\frac{x^3 \ln(x)}{x^2 + 1} \right)' =$

$$\left(\frac{x^3 \ln(x)}{x^2 + 1} \right)'' =$$

5. (5pkt.) Wskaż przedział o długości **nie większej niż jeden** zawierający rozwiązanie równania

$$\ln|\cos x| + \frac{1}{2} = 0.$$

Odpowiedź uzasadnij.

6. (5pkt.) Zbadaj, czy istnieje stała $C > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y > 0$ zachodzi

$$|e^x - e^y| \leq C|x - y|.$$

7. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^{k-n}$$

8. (5pkt.) Używając pierwszych trzech początkowych wyrazów wzoru Taylora dla funkcji $f(x) = 4\arctg(x)$ znajdź przybliżenie liczby π oraz oszacuj jego błąd.

[Pamiętaj: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + R_3(x)$, gdzie $R_3(x) = \frac{1}{3!}f'''(c)x^3$, $c \in (0, x)$.]

Inne zadania otwarte

1. (5pkt.) Udowodnij, że ciąg $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$ jest malejący dla liczb naturalnych $n \geq 3$.

2. (5pkt.) Udowodnij, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

$$\left| \sin(x) + \frac{\pi}{e} \right| > \frac{1}{10}$$

3. (5pkt.) Udowodnij, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n \leq n!$$

4. (5pkt.) Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$ i wskaż przedział domknięty o długości 1 zawierający rozwiązanie równania $f(x) = e^x$.

5. (5pkt.) Zbadaj, czy istnieje stała $C > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y > 0$ zachodzi

$$|\ln(x) - \ln(y)| \leq C|x - y|.$$

6. (5pkt.) Udowodnij, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$

$$n^3 \leq 3^n.$$

7. (5pkt.) Znajdź przedział długości mniejszej niż 2 zawierający rozwiązanie równania

$$\ln(x) = \operatorname{tg}(x)$$

i odpowiednio uzasadnij swą odpowiedź.

8. (5pkt.) Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$$

i naskicuj jej wykres.

9. (5pkt.) Oblicz $f''(x)$ dla $f(x) = \frac{e^x}{x}$ (2 pkt.) i uzasadnij, że f jest wypukła dla $x > 0$ (3 pkt.).

10. (5pkt.) Udowodnij nierówność

$$4 \frac{e^{x+y}}{x+y} \leq \frac{e^{2x}}{x} + \frac{e^{2y}}{y},$$

dla $x, y > 0$.

11. (5pkt.) Zbadaj poprawność formuły

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} \right) e^x,$$

gdzie $f^{(n)}$ oznacza n -tą pochodną funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x}$, dla $x > 0$.

12. (5pkt.) Czy prawdą jest, że $x \sin(x) \leq \frac{\pi}{2}$ dla wszystkich $x \in [0, \pi]$? Odpowiedź dobrze uzasadnij.

13. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x) \sqrt{x^2 + 2x}}{\ln(\arctg x) \sqrt{x^2 + x}}$$

14. (5pkt.)

a) (2 pkt.) Udowodnij, że $\frac{x}{x^2+1} \leq \arctg(x)$ dla $x \geq 0$.

b) (3 pkt.) Znajdź $\sup \left\{ \frac{\arctg(x)}{x} : x > 0 \right\}$ wraz z uzasadnieniem.

15. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \ln(n+1) - n^2 \ln(n) - n).$$

Wsk. Uprość logarytmy, podstaw $\frac{1}{n} = x \in \mathbb{R}$, a potem mądrze zastosuj de l'Hospitala.

16. (5pkt.) Czy istnieje funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(1) = f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $|f'(x)| \leq 1$? Odpowiedź uzasadnij dowodem lub przykładem.

17. (5pkt.) Znajdź najmniejszą (2 pkt.) i największą (3 pkt.) wartość funkcji $f(x) = x - \ln x$ dla $x \in [\frac{1}{2}, 2]$.

18. (5pkt.) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\frac{x^2 + 1}{y^2 + 1} \leq e^{|x-y|}.$$

Wsk. Nałóż logarytm, a potem Lagrange.

19. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

20. (5pkt.) Używając pierwszych trzech początkowych wyrazów szeregu McLaurina funkcji $f(x) = \sin(x)$ znajdź przybliżenie liczby $\sin(1)$ i szacując błąd przybliżenia uzasadnij, że $\sin(1) \geq \frac{5}{6}$.

[Pamiętaj: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + R_3(x)$, gdzie $R_3(x) = \frac{1}{3!}f'''(c)x^3$, $c \in (0, x)$.]