

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

1

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

EGZAMIN, ANALIZA A1, 28.06.2010

8 zadań po 5 punktów, część I, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

PODCZAS EGZAMINU NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 1.

W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 pkt**.

1.1 Czy o liczbie rzeczywistej q można wywnioskować, że musi być wymierna jeśli wiadomo, że

- a) $q = \log_2 3$
- b) $q^2 \in \mathbb{N}$
- c) $q^2 + 2q + 1 = 0$
- d) $2^q \in \mathbb{N}$

1.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że jest prawdziwe dla wszystkich $n = k^2$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, a ponadto że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+3)$. Czy stąd wynika, że

- a) $T(10)$ jest prawdziwe
- b) $T(11)$ jest prawdziwe
- c) implikacja $T(2) \Rightarrow T(12)$ jest prawdziwa.....
- d) implikacja $T(13) \Rightarrow T(14)$ jest prawdziwa

1.3 Czy ciąg (a_n) określony podanym wzorem jest rosnący ($n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$)

- a) $a_n = \frac{n-1}{n}$
- b) $a_n = \sin(n)$
- c) $a_n = n^2 + (-1)^n$
- d) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$

1.4 Czy ciąg (a_n) określony podanym wzorem jest ograniczony (od góry i od dołu)

- a) $a_n = \cos(n + n^2)$
- b) $a_n = e^{n-n^2}$
- c) $a_n = \frac{n^2 - n}{\sqrt{3n^4 + 2}}$
- d) $a_n = \ln\left(\frac{1}{n^2 + n}\right)$

Zadanie 2.

1

W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek napisz **ZB**, **ZW**, lub **R**:

ZB - szereg jest **Z**bieżny **B**ezwzględnie

ZW - szereg jest **Z**bieżny **W**arunkowo

R - szereg jest **R**ozbieżny

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{3n} e^{\frac{1}{3n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{\pi}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{e}\right)^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n 3^n}{4^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-1)^n n^2}{n^3}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})^n$

Zadanie 3.

1

W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

3.1. $A = \{x : x^2 < 2, x \in \mathbb{R}\}$

Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

3.2. $B = \left\{ \frac{2m+n}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

3.3. $C = \left\{ \frac{5n+1}{4n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

3.4. $D = \left\{ \frac{n}{n^3-10} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

3.5. $E = \{|x-y| : x, y \in \mathbb{R} \wedge 2 < x \leq 7 \wedge 3 < y \leq 4\}$

Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

Zadanie 4.

1

Podaj wartości granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia). Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2}+n} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+7}\right)^n = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{\sin x}} \dots\dots\dots$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \dots\dots\dots$

h) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \dots\dots\dots$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin x}}{x} = \dots\dots\dots$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\log_3(4^x + 2^x) - x \log_9 4) = \dots\dots\dots$