

EGZAMIN POPRAWKOWY, ANALIZA A1, , 12.02.2010

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

PODCZAS EGZAMINU NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 1.

W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 pkt.**

1.1 Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a^x & \text{dla } x < 0 \\ bx^2 + cx + d & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

- a) $a = 4, b = 3, c = 2, d = 1$
- b) $a = 5, b = 4, c = 3, d = 2$
- c) $a = 9, b = 5, c = 3, d = 1$
- d) $a = 7, b = 2, c = 2, d = 3$

1.2 Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a^x & \text{dla } x < 1 \\ bx^2 + cx + d & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

- a) $a = 4, b = 3, c = 2, d = 1$
- b) $a = 5, b = 4, c = 3, d = 2$
- c) $a = 9, b = 5, c = 3, d = 1$
- d) $a = 7, b = 2, c = 2, d = 3$

1.3 Czy podany szereg jest zbieżny

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}$

1.4 Czy podany szereg jest zbieżny

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{n+1}$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{2n+1}$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt{n}}$

Zadanie 2.

Przy każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(1)$ jest prawdziwe, $T(100)$ jest fałszywe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n + 10)$. Wówczas:

a) $T(70)$

b) $T(81)$

c) $T(92)$

d) $T(101)$

e) $T(140)$

f) $T(75) \Rightarrow T(105)$

g) $T(161) \Rightarrow T(160)$

h) $T(51) \Rightarrow T(60)$

i) $T(10) \Rightarrow T(11)$

j) $T(10) \Rightarrow T(12)$

Zadanie 3.

W każdym z zadań 3.1-3.5 podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

3.1. $A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 22} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

3.2. $B = \left\{ \frac{2n+1}{3n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

3.3. $C = \left\{ \frac{2n+1}{3n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

3.4. $D = \{x - 2y : x, y \in \mathbb{R} \wedge 16 < x \leq 28 \wedge 3 < y \leq 4\}$ Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

3.5. $E = \{|x - y| : x, y \in \mathbb{R} \wedge 16 < x \leq 28 \wedge 3 < y \leq 4\}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

Zadanie 4.

Podaj wartości granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia). Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2010} \right) = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2010n+1} \right) = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2010} = \dots\dots\dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2010} \right)^{2010} = \dots\dots\dots$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2010n+1} \right)^{2010} = \dots\dots\dots$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \dots\dots\dots$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2010n} = \dots\dots\dots$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n/2010} = \dots\dots\dots$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^{2010}} = \dots\dots\dots$

Zadanie 5.

Wyznaczyć przedział zbieżności rzeczywistego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{(n!)^{2010}}.$$

Zadanie 6.

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi równość

$$a_k = 2 \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie 7.

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \right).$$

Zadanie 8.

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left((\log_2(2x^2+1)) - (\log_4(2x^6+1)) + (\log_8(2x^3+1)) \right).$$