

Egzamin próbny A1 część pierwsza - 80 minut

Imię:

Nazwisko:

1. (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.
Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.
Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 pkt.**

1.1. Czy o liczbie zespolonej z można wywnioskować, że musi być rzeczywista jeśli wiadomo, że

a) $z^2 = -1$

b) $z + \frac{1}{z} = 1$

c) $z^2 - 2|z|^2 + \bar{z}^2 = 0$

d) $\operatorname{Re}z + \operatorname{Im}z = \operatorname{Re}\bar{z} + \operatorname{Im}\bar{z}$

1. 2. Czy podana funkcja ma asymptotę

a) $f(x) = \ln x + \sin x$

b) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}$

1.3. Czy ciąg (a_n) określony podanym wzorem jest zbieżny

a) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

b) $a_n = \sin(n)$

c) $a_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k}$

d) $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{n}, a_1 = 1$

1.4. Czy podana funkcja rzeczywista jest ciągła w swojej dziedzinie

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \ln(|x|)e^{x-x^2}$

c) $f(x) = [x]^2 - 2[x]\{x\} + \{x\}^2$

d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)x^3$

2. (5pkt.) W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek napisz **R**, **M**, lub **A**:

R - ciąg jest **R**osnący

M - ciąg jest **M**alejący

A - ciąg nie jest **A**ni rosnący, ani malejący

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz liczbę punktów w/g tabeli

| | | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| punkty | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |

a) $\frac{n+2}{\sqrt{n^2+2+n}}$

b) $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

c) $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$

d) $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$

e) $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} =$

f) $e^{\frac{1}{\sin n}}$

g) $\frac{3^n}{n!}$

h) $n^2 + (-1)^n \sqrt{n}$

i) $\frac{e^n}{n}$

j) $\log_3(4^n + 2^n) - n \log_9 16$

Imię:

Nazwisko:

3. (5pkt.) W każdym z zadań **3.1-3.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Napis ∞ będzie zinterpretowany jako $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

3.1. $A = \{x : e^x < 2, x \in \mathbb{R}\}$ Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

3.2. $B = \left\{ \frac{n^4 + 1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

3.3. $C = \left\{ \frac{m^3 + n^3 + k^3}{mnk} : m, n, k \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

3.4. $D = \left\{ |z - 1| : z + \frac{1}{z} = 0, z \in \mathbb{C} \right\}$ Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

3.5. $E = \{x^2 - y : x, y \in \mathbb{R} \wedge 2 < x \leq 7 \wedge -3 < y \leq 4\}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

4. (5pkt.) Podaj promień zbieżności R szeregu rzeczywistego ($x \in \mathbb{R}$) oraz zespolonego ($z \in \mathbb{C}$). Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2}+n} x^n \quad R = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n \quad R = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)^n} x^n \quad R = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{n!} \quad R = \dots\dots\dots$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) x^n \quad R = \dots\dots\dots$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\cos(n)} z^n \quad R = \dots\dots\dots$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \quad R = \dots\dots\dots$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (z^2 + n + 1)^n \quad R = \dots\dots\dots$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1+i)^n} \quad R = \dots\dots\dots$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(3+i)^n + (4+i)^n} \quad R = \dots\dots\dots$

Egzamin próbny A1 część druga - 80 minut

Imię:

Nazwisko:

5. (5pkt.) Zbadaj ciągłość funkcji i naskicuj jej wykres

$$f(x) = \sqrt{x[x+2] + [x]\{x\} + \{x\}^2 + 1}$$

6. (5pkt.) Rozstrzygnij zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^4 + n^2 + 1}$$

w zależności od parametru $p > 0$. Oblicz sumę tego szeregu dla **jednej** spośród tych wartości parametru p , dla których szereg jest zbieżny.

Imię:

Nazwisko:

7. (5pkt.) Udowodnij, że dla dowolnych liczb zespolonych z, w zachodzi równość

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

8. (5pkt.) Czy istnieje liczba naturalna n spełniająca równanie

$$n^{16} = 2^n$$

Odpowiedź dobrze uzasadnij.