

Imię:

0	1	2	Σ
---	---	---	---

Nazwisko:

... ..

**Kolokwium 11, A2/Z.Rzeszotnik/16/01/2020**

0. Oblicz pochodną  $(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x))' =$

1. (5pkt.) Korzystając z tego, że dla  $|x| < 1$

(\*) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

A. (3pkt) Udowodnij, że dla  $|x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Wsk. Przyłóż pochodną do równania (\*) i otrzymane równanie przemnoż przez  $x$ .

B. (2pkt) Korzystając z A. oblicz sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Uwaga: Możesz to zrobić, nawet jeśli nie umiesz zrobić A.

**2. (5pkt.)** Niech  $f_n(x) = \frac{\arctg(\sqrt{n}x)}{n^2}$  dla  $x \in \mathbb{R}$  (oraz  $n \in \mathbb{N}$ ). Uzasadnij, że

$$\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$$

to znaczy:

**A. (1pkt)** Oblicz  $f_n'(x)$  i napisz, że uzyskany wynik jest funkcją ciągłą.

**B. (2pkt)** Zrób oszacowanie  $|f_n(x)| \leq a_n$  takie, że szereg  $\sum a_n$  jest zbieżny.

**C. (2pkt)** Zrób oszacowanie  $|f_n'(x)| \leq b_n$  takie, że szereg  $\sum b_n$  jest zbieżny.