Kolokwia A2 Lista 12

1. (5pkt.) Znajdź szereg Fouriera funkcji $f(x) = |x|$, gdzie $x \in (-\pi, \pi)$.

2. (5pkt.) Oblicz sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera.

3. (5pkt.) Znajdź szereg Fouriera funkcji $f(x) = x^2$, gdzie $x \in (-\pi, \pi)$.

4. (5pkt.) Oblicz sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania wstawiając odpowiedni punkt do szeregu Fouriera.

5. (5pkt.) Znajdź szereg Fouriera funkcji $f(x) = x(\pi - |x|)$, gdzie $x \in (-\pi, \pi)$.

Uwaga: Jeśli dobrze policzysz całki, to powinno wyjść $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^3}$.

6. (5pkt.)

a) (3pkt.) Korzystając z równości Parsevala oraz uwagi do poprzedniego zadania oblicz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}$$

b) (2pkt.) Korzystając z części **a)** oraz prostego triku (parzyste, nieparzyste) oblicz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

7. (5pkt.) Znajdź szereg Fouriera funkcji $f(x) = x^2$, gdzie $x \in (-\pi, \pi)$.

8. (5pkt.) Oblicz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Wsk. korzystając z poprzedniego zadania oraz równości Parsevala.

9 (5pkt.) Znajdź szereg Fouriera funkcji $f(x) = x$, gdzie $x \in (0, 2\pi)$.

10. (5pkt.) Korzystając z poprzedniego zadania oraz równości Parsevala oblicz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

11. (5pkt.) Znajdź szereg Fouriera funkcji $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ dla $x \in (-\pi, \pi)$.

Przypomnienie: $\operatorname{sgn}(x) = 1$ dla $x > 0$ oraz $\operatorname{sgn}(x) = -1$ dla $x < 0$.

12. (5pkt.) Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1}$$

Wsk. Wykorzystaj poprzednie zadanie (wstaw coś oczywistego za x :)