

Kolokwium 4 A2/Z.Rzeszotnik

1.1. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(n+1) - 2n}{(n+1)^3 - 8n^3} + \frac{(n+2) - 2n}{(n+2)^3 - 8n^3} + \frac{(n+3) - 2n}{(n+3)^3 - 8n^3} + \cdots + \frac{(2n-1) - 2n}{(2n-1)^3 - 8n^3} \right)$$

1.2. (5pkt.) Udowodnij, że

$$\frac{13}{12} < \int_1^4 \frac{1}{x} dx < \frac{11}{6}$$

2.1. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3 + kn^2 + n^3}{k^4 + 2k^2n^2 + 4kn^3 + n^4}$$

2.2. (5pkt.) Udowodnij, że

a) (2 pkt.) $\frac{1 + \sqrt[4]{e}}{2} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx$

b) (3 pkt.) $\int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$

3.1. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{n^2(k-n)^3}{(k-n)^6 - 64n^6}$$

3.2. (5pkt.) Udowodnij, że

$$\frac{\pi}{2} \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{x} dx \leq 2.$$

Dolne oszacowanie (łatwe) 2pkt. Górne (nie takie trudne) 3pkt.

Przypomnienie: $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

4.1. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1 + 2n + 5n^2} + \frac{n}{4 + 4n + 5n^2} + \frac{n}{9 + 6n + 5n^2} + \cdots + \frac{n}{8n^2} \right)$$

4.2. (5pkt.) Udowodnij, że

$$2 \leq \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)} dx \leq \pi.$$

Dolne oszacowanie 2pkt (wsk. prostokąt). Górne 3pkt (wsk. trapez).

5.1. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n^2} \left(\frac{1}{3+n} + \frac{4}{6+n} + \frac{9}{9+n} + \frac{16}{12+n} + \cdots + \frac{n^2}{4n} \right)$$

5.2. (5pkt.) Udowodnij, że

$$\ln \sqrt{2} \leq \int_1^2 \ln x dx \leq \frac{1}{2}.$$

Wsk. dolne oszacowanie - trójkąt, górne oszacowanie - udowodnij, że $\ln x \leq x - 1$. (Możesz też obliczyć tę całkę.)

6.1. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \dots + \frac{1}{7n} \right)$$

6.2. (5pkt.) Udowodnij, że

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \leq \int_0^4 \frac{1}{x+3} dx \leq \frac{20}{21}.$$

Wsk. dolne oszacowanie - metoda na Riemanna, górne oszacowanie - metoda trapezowa.

7.1. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{1+2n+3n^2} + \frac{n^2}{4+4n+3n^2} + \frac{n^2}{9+6n+3n^2} + \frac{n^2}{16+8n+3n^2} + \dots + \frac{n^2}{11n^2} \right)$$

7.2. (5pkt.) Udowodnij, że

$$\frac{2017^{2017} - 2016^{2017}}{2017} \leq \int_{2016}^{2017} x^x dx \leq \frac{2017^{2017} + 2016^{2016}}{2}.$$

Wsk. dolne oszacowanie - oszacuj funkcję, górne oszacowanie - trapez.

8.1. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{3k+n}{k^2+kn} =$$

8.2. (5pkt.) Udowodnij, że

A. (3pkt.)

$$\int_0^1 \cos(x^2) dx \geq \frac{1 + \cos(1)}{2}$$

Wsk. Trapez.

B. (2pkt.)

$$\int_0^1 \cos(x^2) dx \geq \sin(1)$$