Kolokwium 5 A2/Z.Rzeszotnik

1.1. (5pkt.) Obszar ograniczony krzywą $f(x) = x^p$ oraz prostymi $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ obrócono wokół osi OX, a potem wokół osi OY. Po obrocie okazało się, że objętość obu brył jest taka sama. Znajdź wszystkie $p \geq 0$, dla których zachodzi ta własność.

1.2. (5pkt.) Okrąg o promieniu 1 przecięto dwoma prostymi równoległymi, między którymi odległość wynosi $d < 2$. Czy długość łuku okręgu znajdującego się między tymi prostymi zależy tylko od d? Odpowiedź uzasadnij.

2.1. (5pkt.) Asteroida to krzywa zadana równaniem $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, która w przybliżeniu wygląda tak: $\diamond$. Oblicz obwód asteroidy.

2.2. (5pkt.) Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu asteroidy wokół osi OY. **Wskazówka:** Wykorzystaj symetrię asteroidy.

3.1. (5pkt.) brak **3.2. (5pkt.)** brak

4.1. (5pkt.)

a) (2pkt.) Wyprowadź wzór na objętość kuli o promieniu r.

b) (2pkt.) Wyprowadź wzór na pole powierzchni kuli o promieniu r.

c) (1pkt.) W jaki sposób pochodna łączy oba powyższe wzory?

4.2. (5pkt.) (Świąteczna aureolka) Oblicz pole powierzchni aureoli otrzymanej w wyniku obrotu obszaru $(x-2)^2 + y^2 = 1$ wokół osi OY.
Wsk: Aureolkę zastąp oponką powstającą w wyniku obrotu obszaru $x^2 + (y-2)^2 = 1$ wokół osi OX. Podziel ten obszar na pół i oblicz dwie całki korzystając z tego, że $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$.
Przypomnienie: Wzór na pole powierzchni bryły obrotowej otrzymanej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi OX dla $x \in [a,b]$ to $P = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.

5.1. (5pkt.) Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \sqrt{3}|x|$.

5.2. (5pkt.) Wyprowadź wzór na objętość stożka o wysokości h i promieniu podstawy r.

Przypomnienie: Wzór na objętość bryły obrotowej otrzymanej przez obrót wokół osi OX obszaru pod wykresem funkcji f dla $x \in [a,b]$ to $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$, analogiczny wzór gdy bryła otrzymana jest przez obrót wokół osi OY to $2\pi \int_a^b x|f(x)|dx$.

6.1. (5pkt.) Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \cos(x)$, $y = \frac{9}{2\pi^2}x^2$.
(Wsk. Musisz **zgadnąć** gdzie przecinają się te krzywe.)

6.2. (5pkt.) Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu wokół osi OX obszaru ograniczonego krzywymi $y = \sin(x)$, $y = \frac{2}{\pi}x$.

Przypomnienie: Wzór na objętość bryły obrotowej otrzymanej przez obrót wokół osi OX obszaru pod wykresem funkcji f dla $x \in [a,b]$ to $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

7.1. (5pkt.) Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \frac{2}{x^2+1}$, $y = x^2$ (4pkt.) i zbadaj czy to pole jest mniejsze od e (1pkt).

7.2. (5pkt.) Oblicz pole powierzchni bocznej bryły powstałej w wyniku obrotu wokół osi OX obszaru ograniczonego okręgiem $x^2 + (y+1)^2 = 8$ i warunkami $y \geq 0$, $|x| \leq 2$.

Przypomnienie: Wzór na pole powierzchni bocznej bryły otrzymanej przez obrót wokół osi OX obszaru pod wykresem funkcji f dla $x \in [a, b]$ to $P_B = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$. Pamiętaj też, że $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$.