

Kolokwium 7 A2/Z.Rzeszotnik

1.1 (5pkt.) Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

1.2.(5pkt.) Czy jeśli dwa szeregi o wyrazach nieujemnych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ też musi być zbieżny? Odpowiedź uzasadnij przykładem lub dowodem.

2.1 (5pkt.) W każdym z zadań 1.1-1.5 zbadaj zbieżność obu szeregów i udziel poprawnych odpowiedzi (napisz TAK lub NIE). Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie obie odpowiedzi otrzymasz 1 punkt. Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

$$1.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{(n^2 + 2)(n^2 + 3)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{(n^2 + 2)(n^3 + 3)} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{2n!} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{n^2} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n^2}} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2^n}}{\sqrt[3]{n^3 + 3^n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2^n}}{\sqrt[4]{n^4 + 4^n}} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

2.2.(5pkt.) Zbadaj czy istnieje rozbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taki, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n})$$

jest zbieżny. Podaj przykład takiego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wraz z uzasadnieniem, lub udowodnij, że taki szereg nie istnieje.

3.1. (5pkt.) W każdym z zadań 1.1-1.5 zbadaj zbieżność obu szeregów i udziel poprawnych odpowiedzi (napisz TAK lub NIE). Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie obie odpowiedzi otrzymasz 1 punkt. Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

$$1.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}\sqrt[3]{n^{10}+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}\sqrt[3]{n^{10}+1}} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \ln(n)}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \ln(n)}{3^n} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + (-2)^n}{n^2} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^n \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

3.2. (5pkt.) Znajdź liczbę $C \in \mathbb{R}$, taką że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq C.$$

Odpowiedź dobrze uzasadnij.

4.1. (5pkt.) W każdym z zadań 1.1-1.5 zbadaj zbieżność obu szeregów i udziel poprawnych odpowiedzi (napisz TAK lub NIE). Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie obie odpowiedzi otrzymasz 1 punkt. Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

$$1.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}\sqrt[3]{n^{11}+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n+2}\sqrt[3]{n^{11}+1}} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^e}{e^n} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-3)^n \sqrt{n}}{n^3} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

4.2. (5pkt.) Wiedząc, że ciąg (b_n) dąży do b oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$.

Wsk. Oblicz sumę częściową szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$.

5.1. (5pkt.) W każdym z zadań 1.1-1.5 zbadaj zbieżność obu szeregów i udziel poprawnych odpowiedzi (napisz TAK lub NIE). Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie obie odpowiedzi otrzymasz 1 punkt. Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

$$1.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt{n + 2\sqrt{n^4 + 1}}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt{n + 2\sqrt{n^4 + 1}}} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!} \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

$$1.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \text{Ocena}$$

Czy powyższy szereg jest zbieżny? Czy powyższy szereg jest zbieżny?

5.2. (5pkt.) Wiedząc, że ciąg (b_n) dąży do b oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$.

Wsk. Oblicz sumę częściową szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$.

6.1. (5pkt.) Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podaj przykład, lub uzasadnij, że nie istnieje)?

1.1 Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny oraz szereg $\sum \frac{1}{a_n}$ jest zbieżny.

1.2 Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum a_n^2$ jest rozbieżny.

1.3 Szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny, a szereg $\sum a_n^2$ jest zbieżny.

1.4 Oba szeregi $\sum a_n$ oraz $\sum a_n^2$ są zbieżne.

1.5 Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 1$.

6.2. (5pkt.) Zbadaj zbieżność następujących szeregów (tzn. napisz czy są zbieżne i wyjaśnij dlaczego):

$$2.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt{n + 2\sqrt{n^4 + 1}}}$$

$$2.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$2.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}$$

$$2.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}$$

$$2.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

7.1. (5pkt.) Podaj (wraz z uzasadnieniem) przykład ciągu (a_n) taki, że

1.1 Szereg $\sum \frac{1}{n^{a_n}}$ jest zbieżny.

1.2 Szereg $\sum \frac{1}{n^{a_n}}$ jest zbieżny, a szereg $\sum \frac{1}{n^{\sqrt{a_n-1}}}$ jest rozbieżny.

1.3 Szereg $\sum e^{a_n}$ jest zbieżny, a szereg $\sum e^{a_n^2}$ jest rozbieżny.

$$1.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

1.5 Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum a_{n^2+n}$ jest rozbieżny.

7.2. (5pkt.) Zbadaj zbieżność następujących szeregów (tzn. napisz czy są zbieżne i wyjaśnij dlaczego):

$$2.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right)$$

$$2.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + \sqrt{2}}{n + \sqrt{3}} \right)^{n^2}$$

$$2.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

$$2.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln(n))$$

$$2.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

8.1. (5pkt.) Podaj (wraz z uzasadnieniem) przykład ciągu (a_n) taki, że

1.1 Szereg $\sum n^{a_n}$ jest zbieżny, a szereg $\sum n^{|a_n|}$ jest rozbieżny.

1.2 Szereg $\sum \frac{a_n}{n}$ jest zbieżny, a szereg $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny.

1.3 Szereg $\sum \frac{n}{a_n}$ jest zbieżny, a szereg $\sum \frac{n^4}{a_n^2}$ jest rozbieżny.

1.4 Szereg $\sum (a_{n+1} - a_n)$ jest zbieżny, a szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

$$1.5 \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{3}.$$

8.2. (5pkt.) Zbadaj zbieżność następujących szeregów (tzn. napisz czy są zbieżne i wyjaśnij dlaczego):

$$2.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right)$$

$$2.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\sqrt{n}}$$

$$2.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}$$

$$2.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{3^n}$$

$$2.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\pi}\right)$$