

Kolokwium 8 A2/Z.Rzeszotnik

1.1. (5pkt.) W każdym z przykładów zbadaj czy szereg jest **ZB** - zbieżny bezwzględnie, **ZW** - zbieżny warunkowo, czy też **R** - rozbieżny i udziel poprawnej odpowiedzi (napisz **ZB** lub **ZW** lub **R**). Za każdą dobrą odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}$ Szereg jest

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n + 1}{4^n + 2}$ Szereg jest

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + 1}{n^4 + 2}$ Szereg jest

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n$ Szereg jest

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n! + (-2)^n}{n^n}$ Szereg jest

1.2. (5pkt.) Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2 - 1)^2}$$

Wskazówka. Spróbuj przedstawić $\frac{n}{(n^2-1)^2}$ jako różnicę dwóch ułamków.

2.1. (5pkt.) W każdym z przykładów zbadaj czy szereg jest **ZB** - zbieżny bezwzględnie, **ZW** - zbieżny warunkowo, czy też **R** - rozbieżny i udziel poprawnej odpowiedzi (napisz **ZB** lub **ZW** lub **R**). Za każdą dobrą odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + n + 1}{n^7 + n - 1}$ Szereg jest Ocena

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + 1}{n^4 + 1}$ Szereg jest Ocena

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}$ Szereg jest Ocena

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$ Szereg jest Ocena

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n + n^2 + (-1)^n n^3}{n^4 + 1}$ Szereg jest Ocena

2.2. (5pkt.) Udowodnij, że jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny warunkowo, a szereg $\sum b_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to szereg $\sum (a_n + b_n)$ jest zbieżny warunkowo.

Wskazówka: Udowodnij, że jeśli szereg o wyrazach nieujemnych $\sum c_n$ jest rozbieżny, to $\sum c_n = \infty$. (Za pokazanie wskazówki otrzymasz **2pkt.**)

3.1. (5pkt.) W każdym z przykładów zbadaj czy szereg jest **ZB** - zbieżny bezwzględnie, **ZW** - zbieżny warunkowo, czy też **R** - rozbieżny i udziel poprawnej odpowiedzi (napisz **ZB** lub **ZW** lub **R**). Za każdą dobrą odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

- 1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + \sin(n)}{n^2 \sqrt{n^4 + 1}}$ Szereg jest Ocena
- 1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + \sin(n)}{n^2 \sqrt{n^4 + 1}}$ Szereg jest Ocena
- 1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ Szereg jest Ocena
- 1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)$ Szereg jest Ocena
- 1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^3 + 1)}$ Szereg jest Ocena

3.2. (5pkt.) Podaj przykład ciągu a_n o wyrazach **dodatnich** takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest **rozbieżny** oraz uzasadnij poprawność podanego przez Ciebie przykładu.

4.1. (5pkt.) W każdym z przykładów zbadaj czy szereg jest **ZB** - zbieżny bezwzględnie, **ZW** - zbieżny warunkowo, czy też **R** - rozbieżny i udziel poprawnej odpowiedzi (napisz **ZB** lub **ZW** lub **R**). Za każdą dobrą odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

- 1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{1 - (-1)^n n^4}$ Szereg jest Ocena
- 1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + \ln(n)}{n^3}$ Szereg jest Ocena
- 1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)$ Szereg jest Ocena
- 1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(4n)!!}$ Szereg jest Ocena
- 1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n)}$ Szereg jest Ocena

4.2. (5pkt.) Czy jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum b_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to szereg $\sum a_n b_n$ też musi być zbieżny bezwzględnie? Odpowiedź uzasadnij przykładem lub dowodem.

5.1. (5pkt.) W każdym z przykładów zbadaj czy szereg jest **ZB** - zbieżny bezwzględnie, **ZW** - zbieżny warunkowo, czy też **R** - rozbieżny i udziel poprawnej odpowiedzi (napisz **ZB** lub **ZW** lub **R**). Za każdą dobrą odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

- 1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n + \sqrt{n}}$ Szereg jest Ocena
- 1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + \ln(n)}{n^4}$ Szereg jest Ocena
- 1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$ Szereg jest Ocena

$$1.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad \text{Szereg jest} \quad \text{Ocena}$$

$$1.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln(n+2)}\right) \quad \text{Szereg jest} \quad \text{Ocena}$$

5.2. (5pkt.) Niech $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

a. (2pkt.) Uzasadnij, dlaczego szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

b. (2pkt.) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum a_n(1 + a_n)$.

c. (1pkt.) Podaj przykład ciągu (c_n) i ciągu (d_n) takich, że szereg $\sum c_n$ jest zbieżny, szereg $\sum d_n$ jest rozbieżny oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n} = 1$.

6.1. (5pkt.) W każdym z przykładów zbadaj czy szereg jest **ZB** - zbieżny bezwzględnie, **ZW** - zbieżny warunkowo, czy też **R** - rozbieżny i udziel poprawnej odpowiedzi (napisz **ZB** lub **ZW** lub **R**). Za każdą dobrą odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

$$1.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n}}{n + \sqrt{n}} \quad \text{Szereg jest} \quad \text{Ocena}$$

$$1.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + n - 1}{n^7 + n^5 + 2} \quad \text{Szereg jest} \quad \text{Ocena}$$

$$1.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \quad \text{Szereg jest} \quad \text{Ocena}$$

$$1.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad \text{Szereg jest} \quad \text{Ocena}$$

$$1.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1}}{e^n} \quad \text{Szereg jest} \quad \text{Ocena}$$

6.2. (5pkt.) (W każdym z poniższych zadań udziel odpowiedzi TAK lub NIE i uzasadnij swą odpowiedź.) Czy możemy ocenić zbieżność szeregu $\sum a_n$, jeżeli wiemy, że

$$2.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$2.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2}$$

$$2.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$$

$$2.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1$$

$$2.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^n a_n = \pi$$

7.1. (5pkt.) W każdym z przykładów zbadaj czy szereg jest **ZB** - zbieżny bezwzględnie, **ZW** - zbieżny warunkowo, czy też **R** - rozbieżny i udziel poprawnej odpowiedzi (napisz **ZB** lub **ZW** lub **R**). Za każdą dobrą odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

$$1.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) \quad \text{Szereg jest} \quad \text{Ocena}$$

- 1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n + \sqrt{2}}{2n + \sqrt{3}} \right)^{n^2}$ Szereg jest Ocena
- 1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n)!}{n^{2n}}$ Szereg jest Ocena
- 1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\ln(n+1) - \ln(n))$ Szereg jest Ocena
- 1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ Szereg jest Ocena

7.2. (5pkt.) Niech (b_n) będzie nierosnącym ciągiem, który dąży do zera. Udowodnij, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_{2n-1} - b_{2n})$$

jest zbieżny bezwzględnie.

8. (10pkt.) W każdym z poniższych zadań zbadaj czy dany szereg jest zbieżny bezwzględnie (**ZB**), zbieżny warunkowo (**ZW**), czy też rozbieżny (**R**) i **uzasadnij** swoją odpowiedź.

- 1.1. (2pkt.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + n + 2}{n^5 - n^3 - 3}$ Szereg jest
- 1.2. (2pkt.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n^3 + 3)^3 (n^4 + 4)^4}{(n^5 + 5)^5}$ Szereg jest
- 2.1. (2pkt.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^{n^2}}$ Szereg jest
- 2.2. (2pkt.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\cos(n)}{n^2} \right)$ Szereg jest
- 2.3. (2pkt.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$ Szereg jest