

Kolokwium 9 A2/Z.Rzeszotnik

1.1. (5pkt.) Znajdź przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(3^n + 2^n)}{n^2} x^n$$

1.2. (5pkt.) Oblicz wartość n -tej pochodnej w punkcie zero, czyli $f^{(n)}(0)$, dla funkcji

$$f(x) = e^{x^2}.$$

Wskazówka: Szereg Taylora.

2.1. (5pkt.) Znajdź przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\sqrt[3]{n^3 + n + 1 - n}}$$

2.2. (5pkt.) Rozwiń w szereg potęgowy funkcję

$$f(x) = \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

Wskazówka: Rozłóż tą funkcję na ułamki proste.

3.1. (5pkt.) Znajdź przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\sqrt[3]{n} 3^n}$$

3.2. (5pkt.) Rozwiń w szereg potęgowy funkcję

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Wskazówka: $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

4.1. (5pkt.) Znajdź przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$$

4.2. (5pkt.) Rozwiń w szereg potęgowy funkcję

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x).$$

Wskazówka: Rozwiń f' i scałkuj otrzymany szereg.

5.1. (5pkt.) Znajdź przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) x^n$$

5.2. (5pkt.) Rozwiń w szereg Taylora (czyli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$) funkcję

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Wskazówka: Znajdź wzór na n -tą pochodną f , potem oblicz $f^{(n)}(0)$ i podstaw do wzoru.

6.1. (5pkt.) Znajdź przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$$

6.2. (5pkt.) Znajdź szereg Taylora (czyli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$) funkcji $f(x) = \sin(x)$ (4pkt) oraz zróżniczkuj ten szereg aby otrzymać szereg potęgowy funkcji $\cos(x)$ (1pkt).

Wskazówka. Nie kombinuj, tylko znajdź wzór na n -tą pochodną f , potem oblicz $f^{(n)}(0)$ i podstaw do wzoru.

7.1. (5pkt.) Wyznacz promień zbieżności (3pkt.) i przedział zbieżności (2pkt.) szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n n^2} x^n$$

7.2. (5pkt.) Rozwiń w szereg potęgowy funkcję

$$f(x) = \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}.$$

Wskazówka. Zauważ, że f jest pochodną pewnej prostej funkcji, którą umiesz rozwinąć w szereg potęgowy.