

Kolokwia/A2/2011

1. (5pkt.) Oblicz pochodną podanych funkcji. Za każdą dobrą odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

a) $\sqrt{x}(e^x - x)$

b) $\frac{x^2 + x + 1}{3x^2 + 5}$

c) $(\sqrt[3]{x+1} + 2x)^7$

d) $\operatorname{tg}(x)$

e) $\frac{xe^{x^2}}{x+1}$

2. (5pkt.) Oblicz z definicji pochodną funkcji $f(x) = \ln(x)$.

Wskazówka. $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{y}\right)^y = e^a$.

3. (5pkt.) Spośród różniczkowalnych funkcji f_1, f_2, f_3, f_4 wskaż te, których pochodna nie może być funkcją stałą, wiedząc że

$$f_1(0) = 2, \quad f_1(1) = 4, \quad f_1(3) = 8;$$

$$f_2(0) = 2, \quad f_2(1) = 4, \quad f_2'(3) = 8;$$

$$f_3(0) = 2, \quad f_3(1) = 4, \quad f_3'(3) < f_3(3);$$

$$f_4(0) = 2, \quad f_4(1) = 4, \quad f_4'(3) > f_4(3).$$

4. (5pkt.) Udowodnij, że $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

5. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$$

6. (5pkt.) Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = |e^{2ix} + 2e^{ix} + 1|$$

dla $x \in [0, 2\pi]$.

7. (5pkt.) Znajdź wzór na n-tą pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Wskazówka. Możesz rozłożyć funkcję na prostsze ułamki.

8. (5pkt.) Udowodnij, że jeśli $W(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, to

$$W(x) = \sum_{k=0}^n \frac{W^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

9. (5pkt.) Oblicz przybliżoną wartość liczby $\ln(2)$ korzystając z trzech wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranej szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora.

10. (5pkt.) Oblicz wartość n-tej pochodnej w punkcie zero, czyli $f^{(n)}(0)$, dla funkcji

$$f(x) = e^{x^2}.$$

Wskazówka: Szereg Maclaurina.

11. (5pkt.)

A. (2pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx$$

B. (3pkt.) Oblicz całkę

$$\int (\ln x)^2 dx$$

12. (5pkt.)

A. (2pkt.) Oblicz całkę

$$\int \sin^3 x dx$$

B. (3pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{e^t(t-1)}{t^2} dt$$

13. (5pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{e^{2x} + 1}{e^{3x} + 5e^{2x} + 6e^x} dx$$

14. (5pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

15. (5pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

16. (5pkt.) Oblicz poniższą całkę dla **wybranej przez siebie wartości** parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x^3 - 6x^2 + px - 6} dx$$

17. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(n+1) - 2n}{(n+1)^3 - 8n^3} + \frac{(n+2) - 2n}{(n+2)^3 - 8n^3} + \frac{(n+3) - 2n}{(n+3)^3 - 8n^3} + \cdots + \frac{(2n-1) - 2n}{(2n-1)^3 - 8n^3} \right)$$

18. (5pkt.) Oblicz całkę oznaczoną

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

19. (5pkt.) Obszar ograniczony krzywą $f(x) = x^p$ oraz prostymi $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ obrócono wokół osi OX , a potem wokół osi OY . Po obrocie okazało się, że objętość obu brył jest taka sama. Znajdź wszystkie $p \geq 0$, dla których zachodzi ta własność.

20. (5pkt.) Okrąg o promieniu 1 przecięto dwoma prostymi równoległymi, między którymi odległość wynosi $d < 2$. Czy długość łuku okręgu znajdującego się między tymi prostymi zależy tylko od d ? Odpowiedź uzasadnij.

21. (5pkt.) Oblicz całkę

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2 + 3\ln(x^x) + 2x}$$

22. (5pkt.) Zbadaj zbieżność całek

A. (3pkt.)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x}}{x^4 + x} dx$$

B. (2pkt.)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}$$

23. (5pkt.) Znajdź szereg Fouriera funkcji $f(x) = |x|$, gdzie $x \in (-\pi, \pi)$.

24. (5pkt.) Oblicz sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania wstawiając $x = 0$ do szeregu Fouriera.