

1. (5pkt.) Oblicz pochodną. Za każdą bezbłądną odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

a)  $\sqrt{x}(\ln(x) - x^3)$

b)  $\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 7}$

c)  $(\sqrt[5]{x+2} + 3x)^5$

d)  $\sin(\cos x)$

e)  $\frac{\arctg(x)e^{x^2}}{(x+1)^3}$

2. (5pkt.) Niech  $f$  i  $g$  będą funkcjami różniczkowalnymi w punkcie  $a$  takimi, że  $f(a) = g(a) = 0$ . Oblicz pochodną w punkcie  $a$  następujących funkcji:  $fg$ ,  $f^3 + g^5$ ,  $\cos(f)\cos(g)$ .

3. (5pkt.) Spośród różniczkowalnych funkcji  $f_1, f_2, f_3$  wskaż te, których pochodna musi przyjąć wartość zero w pewnym punkcie, wiedząc że

$$f_1(0) = 2, \quad f_1(1) = -4, \quad f_1(3) = 8;$$

$$f_2(0) = 2, \quad f_2(1) = -4, \quad f_2'(3) = 8;$$

$$f_3(0) = 2, \quad f_3(1) = -4, \quad f_3'(3) > f_3(3).$$

Odpowiedź uzasadnij.

4. (5pkt.) Udowodnij, że  $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$ .

5. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\sin(x)} \ln(x)$$

6. (5pkt.) Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = |e^{ix}|$$

dla  $x \in [0, 2\pi]$ . (Uwaga:  $i = \sqrt{-1}$ .)

7. (5pkt.)

(4 pkt.) Oblicz przybliżoną wartość liczby  $\ln(\frac{1}{2})$  korzystając z trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) szeregu Maclaurina<sup>1</sup> funkcji  $\ln(1-x)$ . Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora.

(1 pkt.) Z powyższego wywnioskuj przybliżenie dla  $\ln(2)$  i oceń, czy jest ono lepsze od przybliżenia uzyskanego dla  $\ln(2)$  w oparciu o trzy początkowe wyrazy szeregu Maclaurina funkcji  $\ln(1+x)$ .

8. (5pkt.) Rozwiń funkcję  $f(x) = \sin(x^2)$  w szereg Maclaurina.

9. (5pkt.)

A. (2pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

---

<sup>1</sup>szereg Maclaurina to szereg Taylora w zerze

**B. (3pkt.)** Oblicz całkę

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx =$$

**10. (5pkt.)**

**A. (2pkt.)** Udowodnij, że  $(e^{x^2} w(x))' = e^{x^2} (2x w(x) + w'(x))$

**B. (3pkt.)** Oblicz całkę

$$\int e^{x^2} (2x^{78} + 77x^{76} + 14x^8 + 49x^6) \, dx =$$

**11. (5pkt.)** Oblicz całkę

$$\int \frac{1}{x^4 - 1} \, dx =$$

**12. (5pkt.)** Oblicz poniższą całkę dla **wybranej przez siebie wartości** parametru  $p \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x^3 + 6x^2 + px + 54} \, dx.$$

**13. (5pkt.)** Oblicz całkę

$$\int \sqrt{e^{2x} - e^x} \, dx$$

**Wskazówka.** Po podstawieniu  $e^x = t$  sprowadź całkę do postaci  $\int \sqrt{1 - \frac{1}{t}} dt$  i podstaw  $1 - \frac{1}{t} = u^2$

**14. (5pkt.)** Oblicz całkę dla wybranego przez siebie parametru  $p$  (w podanych ograniczeniach)

a) (2 pkt.) Parametr  $p > 0$

$$\int x^{-p} e^{x^p} \, dx$$

b) (3 pkt.) Parametr  $p > 1$

$$\int x^{\frac{1}{p}} e^{x^p} \, dx$$

**15. (5pkt.)** Oblicz pole elipsy ograniczonej krzywą o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**16. (5pkt.)** Oblicz całkę

a) (2 pkt.)  $\int_0^\pi \cos(x) e^{\sin^2(x)} \, dx =$

b) (3 pkt.)  $\int_0^\pi \frac{\cos(x)}{x^2 - \pi x + \pi^2} \, dx =$

**17. (5pkt.)** Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3 + kn^2 + n^3}{k^4 + 2k^2n^2 + 4kn^3 + n^4}$$

**18. (5pkt.)** Udowodnij, że

a) (2 pkt.)  $\frac{1 + \sqrt[4]{e}}{2} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx$

b) (3 pkt.)  $\int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$

**19. (5pkt.)** Asteroida to krzywa zadana równaniem  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ , która w przybliżeniu wygląda tak:  $\diamond$ . Oblicz obwód asteroidy.

**20. (5pkt.)** Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu asteroidy wokół osi OY.  
**Wskazówka:** Wykorzystaj symetrię asteroidy.

**21. (5pkt.)** Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4}$$

**22. (5pkt.)** Zbadaj zbieżność całek

**A. (3pkt.)**

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5 + x}} dx$$

**B. (2pkt.)**

$$\int_0^e \frac{dx}{1 - \ln(x)}$$

**23. (5pkt.)** Znajdź szereg Fouriera funkcji  $f(x) = x^2$ , gdzie  $x \in (-\pi, \pi)$ .

**24. (5pkt.)** Oblicz sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

**Wskazówka:** Skorzystaj z poprzedniego zadania wstawiając odpowiedni punkt do szeregu Fouriera.