Kolokwia A2/Z.Rzeszotnik/2013

1. (5pkt.) Oblicz pochodną. Za każdą bezbłedną odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

a) $(\log_x 5)' =$

b) $\left(\dfrac{x^2+\sin(x)}{x^5+7\cos(x)}\right)' =$

c) $\left((\sqrt[3]{x+4}+5x)^3\right)' =$

d) $\left(\sqrt{x^2+1}\,\ln(x^2+1)\right)' =$

e) $\left(\dfrac{\ln(x)\,e^{\sqrt{x}}}{(1-x)^2}\right)' =$

2. (5pkt.)
a) (2pkt.) Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji f, tzn. taką, że $f(g(x)) = x$. Korzystając ze wzoru na pochodną złożenia funkcji wyprowadź wzór $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.

b) (2pkt.) Oblicz pochodną funkcji $\operatorname{arctg}(x)$.

c) (1pkt.) Znajdź wielomian w stopnia drugiego taki, że $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{w(x)}$.

3. (5pkt.) Spośród rózniczkowalnych funkcji f_1, f_2, f_3 wskaż te, dla których muszą istnieć punkty a oraz b takie, że $f_i(a) = f_i'(b)$ wiedząc, że

$$f_1(0) = 2, \quad f_1(2) = 6;$$

$$f_2(0) = 2, \quad f_2(1) = -4, \quad f_2(3) = 8;$$

$$f_3'(x) \leq 1 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Odpowiedź uzasadnij dowodem lub przykładem.

4. (5pkt.) Niech f będzie funkcją różniczkowalną na prostej rzeczywistej taką, że $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ oraz $f'(x) \leq 1$ dla $x \in [0,1]$. Udowodnij, że $f(x) = x$ dla $x \in [0,1]$.

5. (5pkt.) Oblicz granicę. Za każdą bezbłędną odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x} =$

b) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos(x)}{x} =$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\ln(x)} =$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{\sin(x^4)}} =$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}(x)\ln(x) =$

6. (5pkt.) Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = \left|e^{ix} + 1 - 2i\right|^2$$

dla $x \in [0, 2\pi]$. (Uwaga: $i = \sqrt{-1}$.)

7. (5pkt.) Oblicz przybliżoną wartość liczby $\sqrt[3]{7}$ korzystając z trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora.

8. (5pkt.) Rozwiń podaną funkcję w szereg Maclaurina.

A. (3pkt.) $f(x) = x^2 \cos(x^3)$

B. (2pkt.) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$
Wskazówka. Rozwiń f' i "usuń pochodną".

9. (5pkt.)
A. (2pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{1}{x^2 + 5x + 4}\, dx =$$

B. (3pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{\sin x}{e^x}\, dx =$$

10. (5pkt.)

A. (2pkt.) Oblicz całkę. (Wskazówka: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)

$$\int \cos^3 x\, dx =$$

B. (3pkt.) Oblicz całkę. (Wskazówka: $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$)

$$\int \cos^4 x\, dx =$$

11. (5pkt.)

A. (2 pkt.) Oblicz poniższą całkę dla **wybranej przez siebie wartości** parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{5x^4 + px^3 + 1}{x^5 - x^4 + x - 1}\, dx.$$

B. (3pkt.) Oblicz całkę.

$$\int \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1}\, dx.$$

12. (5pkt.)

A. (2 pkt.) Oblicz poniższą całkę dla **wybranej przez siebie wartości** parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{x^4 + px^3 + 1}{x^5 - x^4 + x - 1}\, dx =$$

B. (3pkt.) Oblicz całkę. (Wskazówka: cosinus to przesunięty sinus)

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx =$$

13. (5pkt.) Oblicz poniższą całkę poprzez konstrukcję odpowiedniego ciągu podziałów dziedziny oraz obliczenie granicy ciągu sum Riemanna (**4pkt.**). Sprawdź swoją odpowiedź obliczając tą całkę w standardowy sposób (**1pkt.**).

$$\int_1^2 x^7\,dx$$

14. (5pkt.) Oblicz całki

A. (2 pkt.)

$$\int_1^3 (x-2)\sqrt{(x-1)(3-x)}\,dx =$$

B. (3 pkt.)

$$\int_{-1}^1 x^2 \mathrm{arctg}|x|\,dx =$$

15. (5pkt.) Udowodnij, że

$$\frac{\pi}{2} \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}x}{x}\,dx \leq 2.$$

Dolne oszacowanie (łatwe) 2pkt. Górne (nie takie trudne) 3pkt.

Przypomnienie: $\sin x \leq x \leq \mathrm{tg}x$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

16. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{n^2(k-n)^3}{(k-n)^6 - 64n^6}$$

17. (5pkt.) Asteroida to krzywa zadana równaniem $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, która w przybliżeniu wygląda tak: $\diamond$. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu asteroidy wokół osi OY. **Wskazówka:** Wykorzystaj symetrię asteroidy.

18. (5pkt.) Oblicz pole powierzchni bryły obrotowej otrzymanej przez obrót funkcji $f(x) = e^x$ wokół osi OX dla x pomiędzy 0 oraz $\ln(\sinh 1)$.
Przypomnienie: Wzór na pole powierzchni bryły obrotowej otrzymanej przez obrót funkcji f wokół osi OX dla $x \in [a, b]$ to $P = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.

19. (5pkt.) Oblicz całkę

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^3+1}$$

20. (5pkt.) Zbadaj zbieżność całek

A. (3pkt.)

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x} + x^2}{\sqrt{x} + x^4}\,dx$$

B. (2pkt.)

$$\int_0^1 \frac{dx}{(\ln x)^2}$$

21. (5pkt.) Oblicz sumę

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)}$$

22. (5pkt.) Zbadaj zbieżność jednostajną szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

dla $x \in [0, 1]$.

23. (5pkt.) Znajdź szereg Fouriera funkcji $f(x) = x(\pi - |x|)$, gdzie $x \in (-\pi, \pi)$.

Uwaga: Jeśli dobrze policzysz całki, to powinno wyjść $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^3}$.

24. (5pkt.)

a) (3pkt.) Korzystając z równości Parsevala oraz uwagi do poprzedniego zadania oblicz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}$$

b) (2pkt.) Korzystając z części **a)** oraz prostego triku (parzyste, nieparzyste) oblicz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$