

Kolokwia A2/Z.Rzeszotnik/2014

1. (5pkt.) Oblicz pochodną. Za każdą bezbłędną odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

a) $(e^{\ln x})' =$

b) $\left(\frac{e^{x^2} + \sin(x)}{\operatorname{arctg}(x)} \right)' =$

c) $\left((\sqrt[3]{x+4} + 5\ln(x^2+1))^3 \right)' =$

d) $\left(\sqrt{x^2+1} \frac{x}{x+1} \right)' =$

e) $\left(\frac{\cos(x) 2^{\sqrt{x}}}{\log_2(x)} \right)' =$

2. (5pkt.)

a) (2pkt.) Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji f , tzn. taką, że $f(g(x)) = x$. Korzystając ze wzoru na pochodną złożenia funkcji wyprowadź wzór $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.

b) (3pkt.) Korzystając ze wzoru $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ udowodnij, że $(e^x)' = e^x$.

3. (5pkt.) (W poniższym zadaniu udziel odpowiedzi TAK lub NIE oraz podaj krótkie uzasadnienie np. wzór lub szkic funkcji, albo argument). Czy istnieje funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(-1) = f(1) = 1$, $f(0) = 0$ oraz

a) $f'(0) = 0$?

b) $f'(0) = 2014$?

c) $f'(0) = f'(1)$?

d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \neq \frac{e}{\pi}$?

e) $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \leq 1$?

4. (5pkt.) Udowodnij, że $\operatorname{arctg}(x) < x$ dla $x > 0$ (4pkt.) oraz wywnioskuj, że $x < \operatorname{tg} x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ (1pkt.).

Wsk. Lagrange (spróbuj tak samo jak z $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$)

5. (5pkt.) Oblicz granicę. Za każdą bezbłędną odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{\sin(x)} =$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos(x)} =$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} =$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(x^2 + \pi)}{\sin^2(x) \operatorname{arctg}(x^2 + 1)} =$

e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} =$

6. (5pkt.) Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = 3\operatorname{arctg}(x) - \ln(x)$$

dla $x \in [1, 2]$.

7. (5pkt.) Oblicz przybliżoną wartość liczby $\cos(\frac{1}{2})$ korzystając z trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora.

8. (5pkt.) Znajdź szereg Maclaurina (czyli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$) funkcji

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Wskazówka. Nie kombinuj, tylko znajdź wzór na n -tą pochodną f , potem oblicz $f^{(n)}(0)$ i podstaw do wzoru.

9. (5pkt.)

A. (2pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{1}{x^2 + 2} dx =$$

B. (3pkt.) Oblicz całkę

$$\int \cos(\sqrt[3]{x}) dx =$$

10. (5pkt.)

A. (2pkt.) Oblicz całkę. $\int x \operatorname{arctg}(x^2 + 1) dx =$

B. (3pkt.) Oblicz całkę. $\int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx =$

11. (5pkt.)

A. (2 pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx =$$

B. (3pkt.) Oblicz całkę.

$$\int \frac{1}{x^3 + x^2} dx =$$

12. (5pkt.)

A. (2 pkt.) Oblicz poniższą całkę dla **wybranej przez siebie wartości** parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{x^p - p}{x^5 - 4x} dx =$$

B. (3pkt.) Oblicz poniższą całkę dla **wybranej przez siebie wartości** parametru $p \leq 4$.

$$\int \frac{x^p}{x^9 - 1} dx =$$

13. (5pkt.) Oblicz poniższą całkę poprzez konstrukcję odpowiedniego ciągu podziałów dziedziny oraz obliczenie granicy ciągu sum Riemanna (**4pkt.**). Sprawdź swoją odpowiedź obliczając tę całkę w standardowy sposób (**1pkt.**).

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \quad [\text{Wsk. } p_k = 2^{\frac{k}{n}}, C_n = \sum_{k=0}^{n-1} (p_{k+1} - p_k) f(p_k)]$$

14. (5pkt.)

A. (2 pkt.) Oblicz całkę. [Wsk. $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \dots$]

$$\int_{-2}^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctg(x)\right) dx =$$

B. (3 pkt.) Udowodnij poniższe równanie.

$$\int_0^1 \frac{e^{\arctg x - \frac{\pi}{4} x}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 e^{\arctg x - \frac{\pi}{4} x} dx$$

$$[\text{Wsk. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx \iff \int_a^b f(x) - g(x) dx = 0.]$$

15. (5pkt.) Udowodnij, że

$$2 \leq \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)} dx \leq \pi.$$

Dolne oszacowanie 2pkt (wsk. prostokąt). Górne 3pkt (wsk. trapez).

16. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1 + 2n + 5n^2} + \frac{n}{4 + 4n + 5n^2} + \frac{n}{9 + 6n + 5n^2} + \dots + \frac{n}{8n^2} \right)$$

17. (5pkt.)

a) (2pkt.) Wyprowadź wzór na objętość kuli o promieniu r .

b) (2pkt.) Wyprowadź wzór na pole powierzchni kuli o promieniu r .

c) (1pkt.) W jaki sposób pochodna łączy oba powyższe wzory?

18. (5pkt.) (Świąteczna aureolka) Oblicz pole powierzchni aureoli otrzymanej w wyniku obrotu obszaru $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ wokół osi OY .

Wsk: Aureolkę zastąp oponką powstającą w wyniku obrotu obszaru $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ wokół osi OX . Podziel ten obszar na pół i oblicz dwie całki korzystając z tego, że $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$.

Przypomnienie: Wzór na pole powierzchni bryły obrotowej otrzymanej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi OX dla $x \in [a, b]$ to $P = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

19. (5pkt.) Oblicz całkę

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^3 + 3t^2 + 4t + 2}$$

20. (5pkt.) Zbadaj zbieżność całek

A. (3pkt.)

$$\int_0^\infty \frac{x^e + x^\pi}{x^3 + x^4} dx$$

B. (2pkt.)

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} dx$$

21. (5pkt.) Znajdź szereg Fouriera funkcji $f(x) = x^2$, gdzie $x \in (-\pi, \pi)$.

22. (5pkt.) Oblicz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Wsk. korzystając z poprzedniego zadania oraz równości Parsewala.

23. (5pkt.) Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

Uwaga: Za poprawne uzasadnienie swych obliczeń uzyskasz **ekstra bonus = 1pkt.**

Wsk. Wykorzystaj fakt z wykładu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$ dla $x \in [0, 2\pi]$.

24. (5pkt.) Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$$

Wsk. Wykorzystaj poprzednie zadanie (wstaw coś mądrego za x :)