Kolokwia A2/Z.Rzeszotnik/2015

1. (5pkt.) Oblicz pochodną. Za każdą bezbłedną odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

a) $(\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x))' =$

b) $\left(\dfrac{e^x - \cos(x)}{x^2 - 1}\right)' =$

c) $\left((\sqrt[7]{x+2} + 3\ln(x^3+1))^3\right)' =$

d) $\left(\log_3(x)\,\dfrac{5^x}{x+1}\right)' =$

e) $\left(\sqrt{\cos(1-x^2)}\right)' =$

2. (5pkt.) Korzystając ze wzoru $(fg)' = f'g + fg'$ oraz $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ wyprowadź wzór na pochodną ilorazu $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
Wsk. $\frac{f}{g} = f \cdot g^{-1}$.

3. (5pkt.) (W poniższym zadaniu udziel odpowiedzi TAK lub NIE oraz podaj krótkie uzasadnienie np. wzór lub szkic funkcji, albo argument). Czy istnieje funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ oraz

a) $f'(0) = 0$?

b) $f'(0) = -2015$?

c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1$?

d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 1$?

e) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^2(x) + (\frac{2}{\pi}f'(x))^2 = 1$?

4. (5pkt.) Udowodnij, że $\ln(x) \le x - 1$ dla $x \ge 1$.
Wsk. Lagrange dla x i 1.

5. (5pkt.) Oblicz granicę. Za każdą bezbłędną odpowiedź otrzymasz 1 punkt.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(x)}{x} =$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{tg}(x)\ln(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin(x)^{\frac{1}{\ln(x)}} =$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1-\ln|\cos(\pi x)|}\sin(\pi x)}{(4\mathrm{arctg}(x)-\pi)(e^x + \mathrm{tg}(\pi x))} =$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{\ln(x+1)} =$

6. (5pkt.) Znajdź długości boków trójkąta równoramiennego o obwodzie 3, którego pole jest największe. (Oczywiście musisz uzasadnić swą odpowiedź :)

7. (5pkt.) Oblicz przybliżoną wartość liczby $\mathrm{arctg}(\frac{1}{2})$ korzystając z trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) szeregu Maclaurina funkcji $\mathrm{arctg}(x)$. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora.

8. (5pkt.) Znajdź szereg Maclaurina (czyli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$) funkcji $f(x) = \sin(x)$ (4pkt) oraz zróżniczkuj ten szereg aby otrzymać szereg Maclaurina funkcji $\cos(x)$ (1pkt).
Wskazówka. Nie kombinuj, tylko znajdź wzór na n-tą pochodną f, potem oblicz $f^{(n)}(0)$ i podstaw do wzoru.

9. (5pkt.)
A. (2pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx =$$

B. (3pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x}\, dx =$$

10. (5pkt.)

A. (2pkt.) Oblicz całkę.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx =$$

B. (3pkt.) Oblicz całkę.

$$\int \frac{x^{35}}{x^{24} + 1}\, dx =$$

11. (5pkt.)

A. (2 pkt.) Oblicz całkę

$$\int \frac{3x}{x^2 + 2x - 8}\, dx =$$

B. (3pkt.) Oblicz całkę.

$$\int \frac{3x}{x^2 + 2x + 8}\, dx =$$

12. (5pkt.)

A. (2 pkt.) Oblicz poniższą całkę dla **wybranej przez siebie wartości** parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{x^p - p}{x^9 - 7x^{9-p}}\, dx =$$

B. (3pkt.) Oblicz poniższą całkę dla **wybranej przez siebie wartości** parametru $p > 0$.

$$\int \frac{2x^p + 1}{x^{2015} + x}\, dx =$$

13. (5pkt.) Oblicz poniższą całkę poprzez konstrukcję odpowiedniego ciągu podziałów dziedziny oraz obliczenie granicy ciągu sum Riemanna (**4pkt.**). Sprawdź swoją odpowiedź obliczając tą całkę w standardowy sposób (**1pkt.**).

$$\int_1^2 \sqrt{x}\,dx \quad [\text{Wsk. } p_k = 2^{\frac{k}{n}},\ C_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(p_{k+1}-p_k)f(p_k)]$$

14. (5pkt.)
A. (2 pkt.) Oblicz całkę.

$$\int_0^1 \frac{\cos(\pi x)+1}{x^2-x+1}dx =$$

B. (3 pkt.) Oblicz całkę.

$$\int_{-1}^1 (3x^{\frac{7}{3}}+2x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}})(x^2+x-1)^{\frac{1}{3}}dx =$$

15. (5pkt.) Udowodnij, że

$$\ln\sqrt{2} \leq \int_1^2 \ln x\,dx \leq \frac{1}{2}.$$

Wsk. dolne oszacowanie - trójkąt, górne oszacowanie - udowodnij, że $\ln x \leq x-1$. (Możesz też obliczyć tą całkę.)

16. (5pkt.) Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9}{n^2}\left(\frac{1}{3+n}+\frac{4}{6+n}+\frac{9}{9+n}+\frac{16}{12+n}+\cdots+\frac{n^2}{4n}\right)$$

17. (5pkt.) Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sqrt{3}|x|$.

18. (5pkt.) Wyprowadź wzór na objętość stożka o wysokości h i promieniu podstawy r.

Przypomnienie: Wzór na objętość bryły obrotowej otrzymanej przez obrót wokół osi OX obszaru pod wykresem funkcji f dla $x\in[a,b]$ to $\pi\int_a^b (f(x))^2dx$, analogiczny wzór gdy bryła otrzymana jest przez obrót wokół osi OY to $2\pi\int_a^b x|f(x)|dx$.

19. (5pkt.) Oblicz całki

A. (3pkt.)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\pi}\,dx$$

B. (2pkt.)

$$\int_0^\infty \frac{t-1}{t^3+2t^2+2t+1}\,dt$$

20. (5pkt.) Zbadaj zbieżność całek

A. (3pkt.)

$$\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4+x^7}}\,dx$$

B. (2pkt.)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sin(x)}\,dx$$

21. (5pkt.) Znajdź szereg Fouriera funkcji $f(x)=x^2$, gdzie $x\in(-\pi,\pi)$.

22. (5pkt.) Oblicz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Wsk. korzystając z poprzedniego zadania oraz równości Parsevala.

23. (5pkt.) Oblicz sumę szeregu (4 pkt.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{3^n}$$

Uwaga: Za poprawne uzasadnienie swych obliczeń uzyskasz 1pkt.
Wsk. Wykorzystaj fakt z zajęć: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{3^n} = \frac{9-3\cos x}{10-6\cos x}$.

24. (5pkt.) Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{3^{2k+1}}$$

Wsk. Wykorzystaj poprzednie zadanie (wstaw coś mądrego za x :)
Uwaga: W poprzednim zadaniu powinno Ci wyjść $\frac{6\sin x}{(5-3\cos x)^2}$.