

Kolokwia A2 Lista 10

1 (5pkt.) W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**. Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt. Za udzielenie 12 poprawnych odpowiedzi otrzymasz dodatkowo **1 punkt**.

1.1. Czy istnieje taka liczba zespolona z , że

a) $z^2 = i$

b) $z = |z| + i$

c) $z + \bar{z} = \frac{1}{z}$

d) $\ln|z^6 + z^4 + 1| = -1$

1.2. Czy o liczbie zespolonej z można wywnioskować, że **nie** jest rzeczywista jeśli wiadomo, że

a) $|z^4 + 4| \leq |2 + i|$

b) $|z^4 + 4| \geq |2 + i|$

c) $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z+1}\right)$

d) $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z+1}\right)$

1.3. Czy podany układ równań ma rozwiązanie w liczbach zespolonych?

a) $\begin{cases} z + \bar{z} = 0 \\ z\bar{z} = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} z + i = z^2 \\ z - i = z^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} z^4 + z^2 + 1 = 0 \\ z^6 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} z^4 + z^2 + 1 = z \\ z^6 = 1 \end{cases}$

1.4. Czy podany układ równań ma rozwiązanie w liczbach zespolonych?

a) $\begin{cases} z + w = i \\ z - w = i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z + \bar{w} = i \\ \bar{z} - w = i \end{cases}$

c) $\begin{cases} zw = 1 \\ z + \bar{w} = w \end{cases}$

d) $\begin{cases} zw = 1 \\ z + w = \bar{w} \end{cases}$

2. (5pkt.) Udowodnij, że jeśli liczba zespolona z nie jest rzeczywista, to $|z| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

3. (5pkt.) Zbadaj zbieżność podanych szeregów zespolonych

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + i}{n^4 - i}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{5^n \ln(n+1)}$

4. (5pkt.) Podaj **obszar zbieżności** danego zespolonego szeregu potęgowego (za każdy dobrze podany obszar otrzymasz 1 pkt.).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{n^3 + i}$ Obszar zbieżności:

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 z^n}{n^4 + i}$ Obszar zbieżności:

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ Obszar zbieżności:

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n)z)^n$ Obszar zbieżności:

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n}$ Obszar zbieżności:

5. (5pkt.) Udowodnij, że dla dowolnych ustalonych liczb zespolonych $u \neq w$ zbiór tych $z \in \mathbb{C}$, które stanowią rozwiązania równania $|z + u| = |z + w|$ jest prostą.

6. (5pkt.) Podaj **obszar zbieżności** danego zespolonego szeregu potęgowego (za każdy dobrze podany obszar otrzymasz 1 pkt.).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (iz)^n$ Obszar zbieżności:

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 + i}$ Obszar zbieżności:

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+i)^n z^{2n}$ Obszar zbieżności:

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+i} \right)^{n^2}$ Obszar zbieżności:

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{\ln(|n+i|)}$ Obszar zbieżności:

7. (5pkt.) Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-i)^n + (2+i)^n}{(1+i)^n + (2-i)^n}$$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} ((1+i)z)^n$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{(2n)^3 - i} z^n$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n}}$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^{2n}}{n}$$

Obszar zbieżności: