

ANALIZA MATEMATYCZNA A2 Wykład: Z. Rzeszutnik

Zadanie 1. (5 pkt)

Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{e^{\sin(1-x)}}{x^3 + 2\pi x}$$

Zadanie 2. (5 pkt)

Dla ustalonego $a \in (0, 1)$ oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^a}$$

Zadanie 3. (5 pkt)

O funkcji f wiadomo, że jest różniczkowalna (w sposób ciągły) na prostej rzeczywistej oraz, że $f(1) \leq f(0) \leq f(2)$. Czy z tego wynika już, że pochodna funkcji f musi się zerować w jakimś punkcie? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. (5 pkt)

Niech f będzie taką funkcją, że $f'(x) \geq L > 0$ dla wszystkich x rzeczywistych. Udowodnij, że wówczas dla $x \geq 0$

$$f(x) \geq Lx + f(0)$$

i wywnioskuj stąd, iż

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Zadanie 5. (5 pkt)

Znajdź maksimum i minimum funkcji

$$f(x) = |e^{ix} + 1|$$

dla $x \in [0, 2\pi]$.

Zadanie 6. (5 pkt)

Oblicz wartość π w warunkach bojowych. Wyobraź sobie, że stoisz na biegunie północnym kuli o promieniu 1. Twoim zadaniem jest narysowanie wokół siebie okręgu o promieniu R , a następnie zmierzenie jego obwodu O . Robisz to po to, aby wyznaczyć wartość π , którą standardowo definiujesz jako $\frac{O}{2R}$. Problem polega na tym, że jesteś bardzo małą istotą i myślisz, że powierzchnia na której stoisz jest płaska (w sumie, jest to popularne złudzenie na Ziemi). Tak więc swój okrąg wokół bieguna północnego rysujesz przy pomocy cyrkla sznurkowego używając sznurka o długości $R < 2$. Jaka jest wartość π ?

Odpowiedź. Wartość π w warunkach bojowych wynosi ...

Zadanie 7. (5 pkt)

Znajdź punkty przegięcia funkcji

$$f(x) = |2e^{ix} + e^{2ix}|^2$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8. (5 pkt)

Oblicz wartość n -tej pochodnej w punkcie zero, czyli $f^{(n)}(0)$, dla funkcji

$$f(x) = xe^x.$$

Zadanie 9. (5 pkt)

Rozwiń funkcję $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ w szereg potęgowy, tzn. znajdź szereg potęgowy $\sum a_n x^n$ taki, że $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Zadanie 10. (5 pkt)

Oblicz całkę

$$\int e^x (\sin x - \cos x) dx$$

Zadanie 11. (5 pkt)

A. (2 pkt) Oblicz całkę

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1) \arctan x} dx$$

B. (2 pkt) Oblicz całkę

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 12} dx$$

Zadanie 12. (5 pkt)

A. (3 pkt). Oblicz całkę

$$\int \ln(x^2 + 1) dx$$

B. (3 pkt). Oblicz całkę

$$\int x^5 \sin(x^3) dx$$

Zadanie 13. (5 pkt)

Oblicz całkę

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} - 1} dx$$

Zadanie 14. (5 pkt)

Oblicz całkę

$$\int \frac{x^n}{x^{120} - 1} dx,$$

gdzie n jest dowolnie wybraną przez Ciebie liczbą naturalną, spełniającą nierówność $60 \leq n \leq 100$.

Zadanie 15. (5 pkt)

Oblicz całkę oznaczoną

$$\int_0^1 \frac{\sin(2\pi x)}{e^x} dx$$

Zadanie 16. (5 pkt)

Korzystając z twierdzenia, że funkcja ciągła osiąga swoje maksimum na przedziale domkniętym, udowodnij, że dla funkcji f ciągłej na prostej rzeczywistej mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} M(h) = f(a),$$

gdzie $M(h)$ oznacza maksimum funkcji f na przedziale domkniętym $[a, a + h]$.

Zadanie 17. (5 pkt)

Udowodnij, że

$$\frac{13}{12} < \int_1^4 \frac{1}{x} dx < \frac{11}{6}$$

Zadanie 18. (5 pkt)

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4n^2 + (n+1)^2} + \frac{n}{4n^2 + (n+2)^2} + \frac{n}{4n^2 + (n+3)^2} + \cdots + \frac{n}{40n^2} \right)$$

Zadanie 19. (5 pkt)

Oblicz całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx$$

Zadanie 20. (5 pkt)

Znajdź funkcję F , taką że $F(\frac{1}{e}) = 1$, $F(e) = 2$ oraz $F'(x) = \frac{1}{x \ln x}$ dla $x > 0$

Zadanie 21. (5 pkt)

Od pomarańczy w kształcie kuli o promieniu $\mathbf{R}$ odkrojono równoległe oba końce tak, aby ukazał się miąższ będący koncentrycznie ułożoną kulą o promieniu $\mathbf{r}$. Po zostaniu części pomarańczy pokrojono równoległe na plastry o grubości $\mathbf{d}$. Oblicz objętość skórki pomarańczowej w każdym plastrze, przyjmując że skórka to ta część pomarańczy, która powstaje przez usunięcie z kuli o promieniu $\mathbf{R}$ jej miąższu, czyli kuli wewnętrznej o promieniu $\mathbf{r}$.

Zadanie 22. (5 pkt)

Spróbuj, najlepiej jak potrafisz, postarać się obliczyć całkę

$$\int \sqrt{1+x^2} dx$$

Zadanie 23. (5 pkt)

Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^9 + x^3}} dx$$

Zadanie 24. (5 pkt)

Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin^2 x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$