

Lista 1-1. Indukcja matematyczna.

1. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

3. Dowieść, że $6^n - 1$ dzieli się przez 5, dla każdej liczby naturalnej n .

4. Niech $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = 2a_n + 1$ dla n naturalnych. Znajdź wzór na a_n i udowodnij go indukcyjnie.

5. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n oraz dowolnej liczby $a \geq -1$ zachodzi nierówność

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

6. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $10n < 2^n + 25$.

7. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + \dots + n \cdot 3^{n-1} \geq \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n.$$

8. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$9 \cdot (3n)! \cdot n \dots \dots \dots 2 \cdot (3^n \cdot n!)^3.$$

W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>$, $<$, $=$, $\geq$, $\leq$.

9. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 6$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(10)$,
- b) prawdziwe jest $T(11)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(7) \Rightarrow T(13)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(3) \Rightarrow T(1)$,
- e) prawdziwa jest implikacja $T(1) \Rightarrow T(3)$.

10. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(100)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-1)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(9)$,
- b) prawdziwe jest $T(8)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(50) \Rightarrow T(30)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(300) \Rightarrow T(200)$,
- e) prawdziwa jest implikacja $T(30) \Rightarrow T(50)$,
- f) prawdziwa jest implikacja $T(200) \Rightarrow T(300)$.