

Lista 1-2. Dwumian Newtona.

Oznaczenia:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

$$11. \sum_{l=-9}^{10} l^5 \quad 12. \sum_{m=-6}^{10} 2 \quad 13. \prod_{n=1}^5 n \quad 14. \prod_{i=-2020}^{2020} i^{2020}$$

15. Zauważ, że dla dowolnych liczb naturalnych $M \leq N$ oraz liczby całkowitej k zachodzi

$$\sum_{n=M}^N a_n = \sum_{n=M-k}^{N-k} a_{n+k}.$$

Uwaga: Powyższą operację nazywamy przesunięciem indeksu sumowania.

Zapamiętaj:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad \text{ale} \quad 0! = 1,$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{dla} \quad k \leq n,$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

16. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$.

Wskazówka: $(1+1)^{2n}$.

17. Wskazać taką liczbę x , że dla dowolnych liczb naturalnych n i $k \leq n-2$ prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + x \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

18. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \binom{100}{27}, \binom{100}{47}, \binom{100}{57}, \binom{100}{77}, \binom{100}{97}.$$

19. Dowieść, że dla każdego $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

20. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n} < 7^n$.