

Lista 10-2. Optymalizacja i reguła de l'Hospitala.

201. Zbadaj, czy funkcja

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

jest różniczkowalna w zerze (tzn. dla $x = 0$).

202. Wyznacz parametr A taki, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} & \text{dla } x \neq 8 \\ A & \text{dla } x = 8 \end{cases}$$

jest ciągła.

203. Wyznacz parametry A_k ($k \in \mathbb{Z}$) takie, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x} & \text{dla } x \notin \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \\ A_k & \text{dla } x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

jest ciągła.

204. Wyznacz parametr A taki, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} |x| \ln(|x|) & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

205. Zbadaj czy z tym parametrem A powyższa funkcja jest różniczkowalna w zerze.

206. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{7x} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 7 & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$

Oblicz $f'(0)$.

207. Wyznacz parametr A taki, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i oblicz $f'(0)$.

208. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sin(\pi x)} & \text{dla } x \notin \mathbb{Z} \\ x^3 - x & \text{dla } x \in \mathbb{Z} \end{cases}.$

Oblicz $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbb{Z}$, dla których ta pochodna istnieje.

209. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 3e^x + 2}{x^n} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

Znajdź A oraz największą liczbę naturalną $n \in \mathbb{N}$ takie, że istnieje $f'(0)$ i oblicz $f'(0)$.

210. (Egzamin licencjacki, wrzesień 2020). Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Wsk. Dla $x \neq 0$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - 1}}{x} = \operatorname{sgn}(x) \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}}.$$