

Lista 11-2. Pochodne wyższych rzędów.

Znajdź przedziały monotoniczności i wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji danych wzorami:

221. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$,

222. $x^8 - x^2 - 15$,

223. $\sin^4 x$,

224. $\sqrt{x} - \ln x$,

225. $x^4 + \sqrt[4]{x}$.

Porównaj dane liczby:

226. $\sin(1) + \sin(3)$ i $2\sin(2)$,

227. $2 \cdot 9^{17} + 12^{17}$ i $3 \cdot 10^{17}$,

228. $\arctg(2) + \arctg(4)$ i $2\arctg(3)$,

229. $\arctg(100) + 2\arctg(103) + 3\arctg(106)$ i $6\arctg(104)$ (patrz na uwagę poniżej).

Uwaga: Dla funkcji wypukłych f mamy, że

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n),$$

gdy $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ oraz $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$.

Natomiast dla funkcji wklęsłych powyższa nierówność zmienia się na przeciwną.

230. Udowodnij, że jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna, to

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Wsk. de l'Hospital.