

Lista 2-1. Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.

21. Dowieść, że liczba $\sqrt{\frac{3}{5}}$ jest niewymierna.

22. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ jest niewymierna.

23. Zbadaj wymierność liczby $(\sqrt{2} - 1)^3 - 5\sqrt{2}$.

24. OSZUSTWO

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3 - \sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$w = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$$

$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$$

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w + 1) + (w - 1)(w + 1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w + 1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

25. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

26. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

27. Udowodnij, że jeśli $a + 2b$ oraz $3a + b$ są wymierne, to a i b też są wymierne.

28. Sprawdź czy jeśli ab^2 oraz a^3b są niezerowe i wymierne, to a i b też muszą być wymierne.

29. Niech w będzie dowolną liczbą wymierną. Udowodnij, że jeśli $a^2 + wa$ oraz a^3 są wymierne, to a też jest wymierna.

30. O liczbach wymiernych x i y wiadomo, że $x + y$ oraz $x \cdot y$ są całkowite. Udowodnij, że x i y też muszą być całkowite. A co jeśli nie założymy, że x i y są wymierne?